

# MODELAGEM DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA: SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

**Francisco Chagas da Silva Filho, DSc**  
Prof. Titular, UniforAvenida  
Washington Soares, 1321  
CEP 60811-341, Fortaleza,  
CE.fchagas@unifor.br

## Resumo

Este artigo apresenta uma coletânea de problemas de engenharia com soluções obtidas através do método dos elementos finitos. Os problemas de engenharia são modelados matematicamente com o intuito de descrever o fenômeno físico que envolve particularmente o caso estudado. Seja uma situação onde o objetivo é determinar a variabilidade das tensões em uma peça mecânica e suas respectivas deformações, seja a distribuição do fluxo de temperatura em uma placa metálica, o fluxo de água em um meio poroso, etc.. Estes e outros fenômenos que ocorrem freqüentemente nos problemas de engenharia são modelados através de equações diferenciais parciais, nas quais se tem a divisão em dois tipos principais: problemas de valores de contorno e problemas de valor inicial. A solução analítica destas equações diferenciais é na grande maioria dos casos impossibilitada pela grande dispersão das propriedades dos materiais, da geometria complexa, etc. Por este motivo a grande utilização de métodos numéricos, no qual se tem a substituição da solução exata analítica por uma solução aproximada. Em destaque apresenta-se o método dos elementos finitos que se apresenta como uma das melhores ferramentas disponíveis para solução dos mais variados problemas encontrados nos diversos ramos da engenharia.

*Palavras-chave: EDP, elementos finitos, barragem, tensão, método numérico.*

## Abstract

The present paper approaches main engineering problems solved by finite element method. Engineering problems are mathematically represented to describe physical phenomena and involve the solution of particular case studies. It embraces many different topics such determination of the variability of the stress in a mechanical structure, its strains, flux of heat in a metallic plate, and water flow in a porous media. These and other phenomena that occur frequently in engineering problems can be solved by partial differential equations. These problems are divided in two main types: problems of contour values and of initial value. The analytical solution of these partial differential equations is in the great majority non applicable, due to the dispersion and the complexity of the properties of the materials, geometry etc. For this reason the use of numerical methods is important in a way to substitute the analytical accurate solution for an approach solution. In this work the method of the finite elements is highlighted as a regular mathematical tool available for the solution of the great variety of problems found in the diverse branches of engineering.

*Keywords: PDE, finite elements, dam, stress, numerical method.*

## 1 Introdução

Os problemas de engenharia geralmente são modelos matemáticos dos fenômenos físicos e, os modelos matemáticos são definidos por equações diferenciais em que são conhecidas as condições de contorno e/ou as condições iniciais. As equações diferenciais são obtidas através da aplicação das leis e princípios fundamentais da natureza para um sistema, representando o balanço de massa, força e energia.

Quando possível, a solução exata destas equações proporciona a determinação de um comportamento detalhado de um sistema sob um dado conjunto de condições impostas. As soluções analíticas são compostas de duas partes: (a) uma parte homogênea e (b) uma parte particular.

Em um dado problema de engenharia, existe a divisão dos parâmetros em dois grupos que deverão influenciar na forma em que o sistema se comporta. Estes parâmetros incluem as propriedades tais como o módulo de elasticidade, condutividade hidráulica, e viscosidade.

Por outro lado, existem os parâmetros que produzem uma perturbação em um sistema. Exemplos destes parâmetros incluem as forças externas, momentos, diferença de carga hidráulica ao longo do meio poroso, e a diferença no fluxo do fluido.

Nas modelagens numéricas a solução obtida é definida por um procedimento aproximado, que em muitas situações se aproximam de forma significativa do resultado real esperado. Nestas modelagens, pode-se citar a utilização dos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos. Cada um destes métodos apresenta vantagens e desvantagens, cabendo ao usuário a definição da modelagem a ser utilizada. Chapra e Canale (2002) apresentam a solução das equações diferenciais por estes métodos e faz comparação entre as características de cada um.

Neste trabalho optou-se por uma apresentação conceitual e qualitativa de vários problemas de engenharia onde a utilização do método dos elementos finitos possibilita a análise dos fenômenos de forma mais realista. Assim, cada vez mais são utilizados os métodos numéricos e, os softwares saíram da exclusividade da academia e passaram a ser utilizados com mais frequência no âmbito profissional e comercial.

Assim sendo, são apresentados vários softwares que utilizam o método dos elementos finitos na solução destes problemas e, com o passar do tempo, verifica-se que esta ferramenta está se tornando imprescindível ao engenheiro na sua tarefa de realização de análises e projetos de obras de engenharia.

## 2 Solução de equações diferenciais parciais (EDP) por métodos numéricos

Existem várias limitações à utilização dos métodos analíticos, tendo em vista a grande variabilidade dos parâmetros, das propriedades dos materiais, das condições de contorno e de condições iniciais extremamente variáveis. Em geral, os solos apresentam a condutividade hidráulica de forma anisotrópica e heterogênea no espaço discretizado, em problemas de fluxo de água em meios porosos.

Por sua vez, os métodos numéricos permitem a solução das equações diferenciais em qualquer distribuição espacial, com propriedades dos materiais bastante variáveis, em qualquer geometria e variando com o tempo, ou seja, em condições transientes.

Os principais grupos de métodos numéricos utilizados em engenharia civil são:

- Método das Diferenças Finitas (MDF)
- Método dos Elementos Finitos (MEF)
- Método dos Elementos de Contorno (MEC)

Todos estes métodos numéricos envolvem a representação do domínio, seja ele de fluxo de água, de calor, de equilíbrio de estruturas, etc., por um número limitado de pontos discretos chamados de nós. Um sistema de equações algébricas é obtido com relação a estes pontos nodais, os quais representam os valores das variáveis dependentes, de acordo com o tipo de EDP que modela o fenômeno em estudo.

Também no método dos elementos finitos, procede-se a substituição da região de interesse por uma série de nós ou pontos nodais. Grupos de nós juntos por segmentos de linhas para formar linhas, arcos, triângulos, retângulos ou blocos prismáticos são chamados de elementos. Coletivamente os nós e os elementos formam a malha de elementos finitos. Os parâmetros dos materiais são usualmente constantes no interior do elemento, mas podem variar de elemento para elemento.

A definição da malha de elementos finitos é extremamente importante no MEF. A acurácia da solução e o trabalho de computação é diretamente relacionado com o projeto da malha. Boas malhas produzem melhores e mais rápidos resultados. Entretanto, vale salientar que malhas menos refinadas requerem menos de tempo de computação, mas com implicações na acurácia da solução.

A solução das equações diferenciais parciais também envolve a obtenção de um sistema de equações lineares que devem ser resolvidas para determinação da variável dependente, como por exemplo, carga hidráulica, deslocamento, concentração de solutos, etc.. Para isto existem dois grandes grupos de métodos usados para obter a integração das formulações em elementos finitos.

- Métodos variacionais
- Métodos dos resíduos ponderados

Os métodos dos resíduos ponderados são ainda divididos em colocação, subdomínio e o método de Galerkin. Por não atender ao objetivo deste artigo, recomenda-se ao leitor que tenha interesse mais permonorizado, Smith e Griffiths (1999).

A seguir são apresentados os exemplos escolhidos com os softwares usados em cada problema.

### 2.1 Uma placa metálica e retangular com um furo

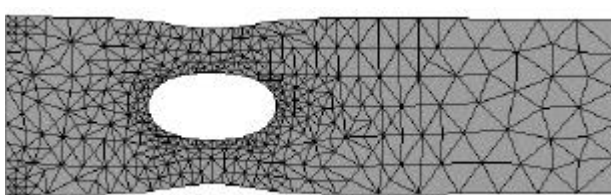
Nos problemas de análises de tensões e deformações encontra-se a grande maioria dos problemas de engenharia civil e mecânica. Os problemas são usualmente resolvidos através da teoria desenvolvida na resistência dos materiais. As equações diferenciais parciais de equilíbrio são resolvidas para diversos problemas particulares, como por exemplo, os problemas de carregamento axial, com torção, flexão, etc.. Em geral, como modelo constitutivo, utiliza-se a teoria da elasticidade, que pressupõe que as deformações são totalmente recuperadas com a retirada das forças que impuseram a configuração deformada da peça. Para tanto, são utilizados na modelagem constitutiva dois parâmetros elásticos: o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. Ver maiores detalhes em Valliapan (1981).

Para obtenção completa da solução é preciso delimitar a região a ser estudada, definir as condições de contorno (i.e. carregamentos e apoios prescritos), as propriedades dos materiais e o tipo de análise (uni, bi ou tridimensional). Em grande parte dos problemas é possível adotar a análise bidimensional, que neste caso poderá ser através do estado plano de tensões ou de deformações. Em problemas estruturais, o estado plano de tensões é frequentemente utilizado, enquanto em geotecnia existe uma predominância do estado plano de deformações.

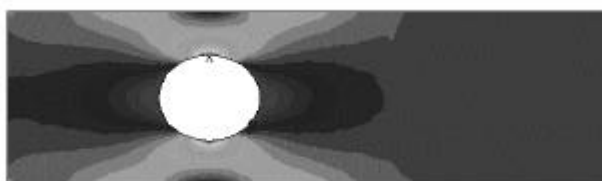
O exemplo apresentado na Figura 1 mostra uma placa retangular carregada axialmente de tal forma a alongar, ou seja, uma sollicitação nas extremidades da peça gera tensões que resistirão à aplicação deste carregamento. As tensões são em geral de tração e, por estar geometricamente submetida à existência de um furo interno, ocorrerá uma concentração de tensões nas proximidades do furo, comportamento este admitido até mesmo intuitivamente. Em uma seção que passa pelo eixo do furo circular ocorre necessariamente um estrangulamento e, é neste local onde ocorre a possibilidade maior de uma possível ruptura. Utilizando-se um modelo elástico, seria mais conveniente limitar a carga externa para o nível de tensões de tal forma que, nas proximidades do furo não ocorra a ultrapasse do comportamento elástico do material.

Na Figura 1 tem-se uma malha de elementos finitos gerada pelo software FlexPDE com elementos apenas triangulares. Claramente se percebe o refinamento da malha nas proximidades do furo, onde ocorre a concentração dos gradientes de tensões. A malha da figura está deformada, com deslocamentos exagerados com o intuito de melhorar a visualização do comportamento.

Na Figura 2 verifica-se uma graduação das tensões geradas na direção horizontal, percebendo-se aí a concentração de tensões mencionadas acima. Esta solução foi obtida pela solução das equações de equilíbrio em conjunto com a imposição da compatibilidade e, admitindo o comportamento elástico na modelagem constitutiva. Foi determinada com o uso do software FlexPDE que adota na solução numérica o método dos elementos finitos.



**Figura 1:** Malha deformada da placa retangular



**Figura 2 :** Visualização da concentração de tensões nas imediações do furo

## 2.2 Uma barragem de terra submetida a fluxo estacionário

O fluxo de água em meios porosos é um fenômeno muito conhecido em problemas de engenharia geotécnica. Exemplos disso são os casos estudados de barragens de terra em condição de enchimento e fluxo estacionário, ou seja, com a carga hidráulica sem variação com o tempo. O fluxo estacionário ocorre em condições saturadas, não-saturadas ou em ambas. Na barragem mostrada na Figura 3 verifica-se uma condição de reservatório cheio, com material do maciço isotrópico, com predominância do trecho saturado, mas com a existência de regiões onde não se caracteriza o grau de saturação cem por cento.

A figura foi gerada pelo software Seep/w (KRAHN, 2004) do pacote Geo-slope e mostra além das equipotenciais, vetores de velocidade de fluxo em todo o domínio. A equação de fluxo em meio isotrópico e com condições estacionárias é denominada de Laplace e governa vários fenômenos na natureza, tais como fluxo de temperatura e fluxo elétrico. Neste exemplo em particular o sistema de equações é linear, pois a condição estacionária pressupõe também a constância da condutividade hidráulica com o tempo.

Também se pode visualizar nesta figura uma concentração de fluxo na saída, próxima ao pé do talude de jusante. Isto é ocasionado pelo aumento dos gradientes hidráulicos proporcionados pelo sistema de drenagem da barragem. Na parte superior da figura os vetores de velocidade são caracterizados por um fluxo não-saturado. Na mesma seção e em cota inferior, na região saturada, o fluxo é mais intenso, uma vez que a condutividade hidráulica aumenta com o grau de saturação.

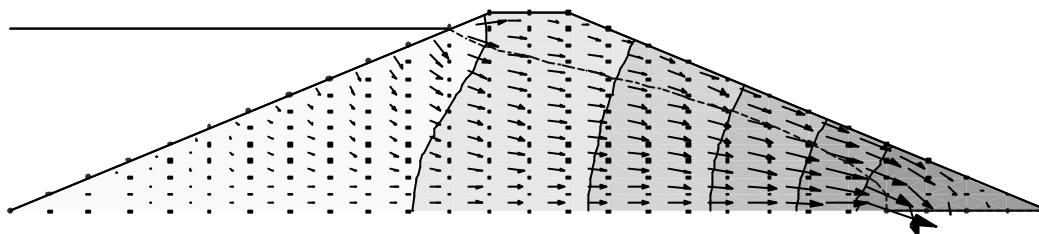


Figura 3: Barragem de terra em fluxo estacionário (reservatório cheio)

## 2.3 Uma barragem de terra submetida a fluxo transiente

Na possibilidade dos reservatórios serem submetidos ao rebaixamento do nível da água no reservatório em condições rápidas, a umidade do material da barragem varia com o tempo e, em conseqüência, a própria condutividade hidráulica. Assim sendo, o sistema de equações gerado para o método dos elementos finitos é não-linear, já que a carga hidráulica varia com o tempo e assim também, a umidade e a condutividade hidráulica. Esta variação é imposta na equação diferencial com a admissão do tempo e aí, além das condições de contorno, é necessária a definição das condições iniciais que na verdade é uma análise estacionária preliminar.

No caso da Figura 4 o rebaixamento do nível da água no reservatório ocorre posteriormente à condição de reservatório cheio. No rebaixamento verifica-se também que os gradientes tomam diferentes direções e a água, além de se dirigir para o exterior do maciço também percola para dentro do próprio reservatório, fazendo com que exista sempre um nível de água final, mesmo cessando a contribuição superficial das descargas freáticas para a bacia hidráulica.

Observa-se na Figura 4 as linhas equipotenciais com variação representada pela graduação nas cores. Já a velocidade da água é demonstrada proporcionalmente pelos vetores que também variam com o tempo. Obviamente que este comportamento transiente será totalmente eliminado no momento em que não existirem mais gradientes gerados no rebaixamento. A condição final é uma nova situação estacionária, com um novo nível d'água e fluxo de montante para jusante, claramente com menores vazões de percolação.

A percolação da água no esvaziamento rápido do reservatório influencia substancialmente o comportamento tensão-deformação do maciço, podendo inclusive vir a proporcionar um desequilíbrio entres as tensões geradas pelas forças de massa e a resistência do solo ao cisalhamento. Para modelar também este comportamento seria necessário a solução associada ou acoplada das equações de equilíbrio. O acoplamento seria a solução simultânea do fenômeno de fluxo e equilíbrio. É mais realista, mas acarreta uma complexidade muito maior, sendo substituída muitas vezes por uma análise de equilíbrio limite, após a definição da condição mais desfavorável durante o processo de esvaziamento do reservatório.

A análise apresentada na Figura 4 foi também obtida pelo programa Seep/w.

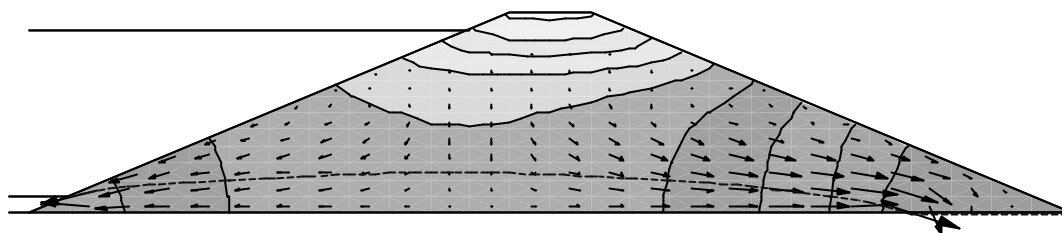


Figura 4: Barragem de terra em fluxo transiente (esvaziamento do reservatório)

#### 2.4 Fluxo de água em um sulco de irrigação superficial com drenagem

A irrigação por sulcos é um dos tipos de procedimentos mais antigos e se apresenta como de baixo custo comparado com sistemas modernos. Não utiliza a tecnologia de aspersão e pode ser utilizada na maioria dos tipos de culturas existentes. É, entretanto, um dos métodos onde se tem a menor eficiência, visto que apresenta uma grande perda de água por drenagem profunda que supera a capacidade de absorção pelas plantas.

Além disso, a irrigação por sulcos acarreta ao longo do tempo, a deposição de uma grande quantidade de sais presentes na água de irrigação advindo do próprio escoamento superficial. Os sais causam uma diminuição na qualidade do solo para fins de desenvolvimentos das culturas. Para amenizar este problema, é usual o desenvolvimento de sistemas de drenagem para lavagem do solo, carreando os sais depositados no solo.

A Figura 5 mostra a malha de elementos finitos de um sulco com um tubo de drenagem abaixo e a direita do sulco. Evidentemente que ocorrerá uma concentração do fluxo a partir do tirante d'água no sulco em direção ao tubo de drenagem. O fenômeno se dá em condições transientes e poderá atingir a condição estacionária, com a manutenção da vazão no sulco e com o dreno funcionando até a sua capacidade de drenagem.

O programa Hidrus2D foi utilizado para modelar este fenômeno e apresenta os resultados em termos de vetores de velocidade na condição final estacionária (Figura 6). Percebe-se pelos resultados que as velocidades são maiores na superfície do sulco e nas proximidades do dreno. O programa Hidrus2D utiliza o método dos elementos finitos e soluciona as equações diferenciais parciais com geração de sistemas de equações não-lineares. Para esta solução utiliza o método de Newton-Raphson.

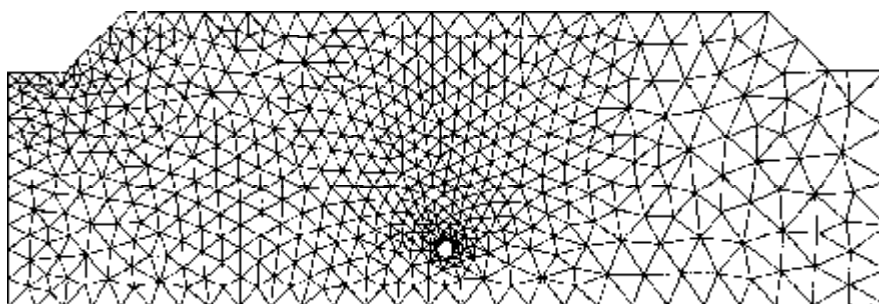


Figura 5 : Malha de elementos finitos do programa Hidrus2D (sulco de irrigação)

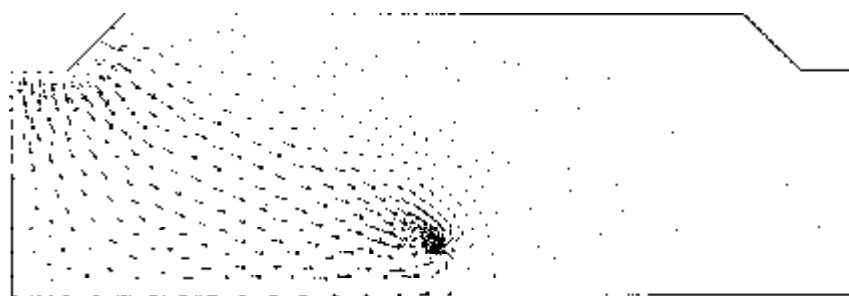


Figura 6: Vetores de velocidade da água em direção ao tubo de drenagem (Hidrus2D)

## 2.5 Escavação em ambiente seco com a utilização de cortina atirantada

Em muitas situações práticas de engenharia geotécnica é necessária a retirada de material terroso de uma área delimitada até uma profundidade definida em acordo com a utilização do espaço. Muito comuns são as escavações para a construção de subsolos de estacionamentos dos edifícios residenciais. As escavações obrigam a construção de estruturas de contenção, tendo em vista serem os solos materiais que resistem aos esforços predominantemente por atrito interno.

A ruptura do maciço arrimado se dará pela mobilização completa da resistência ao cisalhamento dos solos e, a contenção deverá ser dimensionada de tal forma a suportar as pressões do solo. Estas pressões variam com a profundidade e com a movimentação da cortina. Os empuxos atuantes na cortina poderão se dar na condição ativa, de repouso ou passiva, sendo que no caso particular de uma cortina de contenção o acionamento dos empuxos notáveis ocorrem ao mesmo tempo. Por exemplo, em uma escavação com cortina de contenção, o solo no interior da cava estará predominantemente com acionamento passivo enquanto que no exterior o acionamento será ativo.

Nestas condições o dimensionamento da cortina de concreto e dos tirantes será obtido de forma mais realista com a utilização do método dos elementos finitos, pois é possível considerar todos os materiais envolvidos e com a forma em que os mesmos estarão trabalhando na estrutura. Para tanto se torna necessário inclusive a consideração de elementos de transição no contato dos materiais estruturais com o solo.

Já com relação à modelagem constitutiva, os materiais terrosos em geral terão o comportamento tensão-deformação elástico-perfeitamente plástico. Elástico até o nível de tensões delimitado pela superfície de escoamento do modelo Mohr-Coulomb, plástico sem endurecimento nem amolecimento (definição de perfeitamente plástico), quando a trajetória de tensões toca a superfície de escoamento.

Até a metade da década de setenta era impossível a realização de uma análise por elementos finitos de uma situação como a descrita acima, pois nesta época apareceram os primeiros programas desenvolvidos exclusivamente para utilização em geotecnia. Exemplo, disso é o programa Crisp (BRITTO e GUNN, 1987) que tem implementado vários tipos de modelos constitutivos inclusive com acoplamento com adensamento pela teoria de Biot.

Outro exemplo clássico de software desenvolvido exclusivamente para geotecnia é o programa Plaxis que será apresentado para modelar a escavação com a descrição dada acima. A Figura 7 mostra o resultado de uma análise com o programa Plaxis com as deformações exageradas para que se possa ter uma idéia da tendência de deslocamentos durante a escavação. Vale salientar que é possível modelar através de elementos finitos todo o processo de execução da obra, desde a colocação da cortina, inserção dos tirantes e retirada do material do interior da cava.

Percebe-se também na Figura 7 que o solo no interior da cava tem uma componente do deslocamento vertical no sentido ascendente, enquanto que no exterior da cava são verificadas componentes verticais descendentes. Como se trata de uma análise em ambiente seco, é possível concluir que existirá uma variação final dos volumes dos materiais, o que não ocorrerá em uma análise não-drenada com o solo saturado.

Veja também que se pode notar a eficiência da ancoragem. As condições de contorno necessárias nestas situações também são indicadas na Figura 7. Restrição na direção vertical, nas laterais da malha (barras paralelas) e nas direções horizontal e vertical na base da malha (cerquilhas).

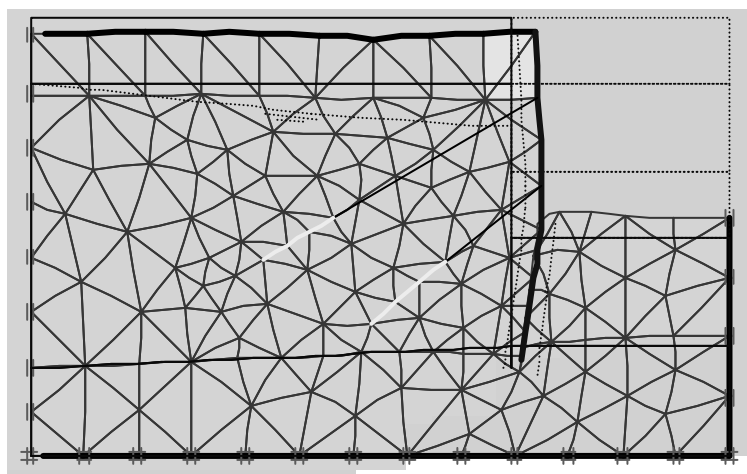
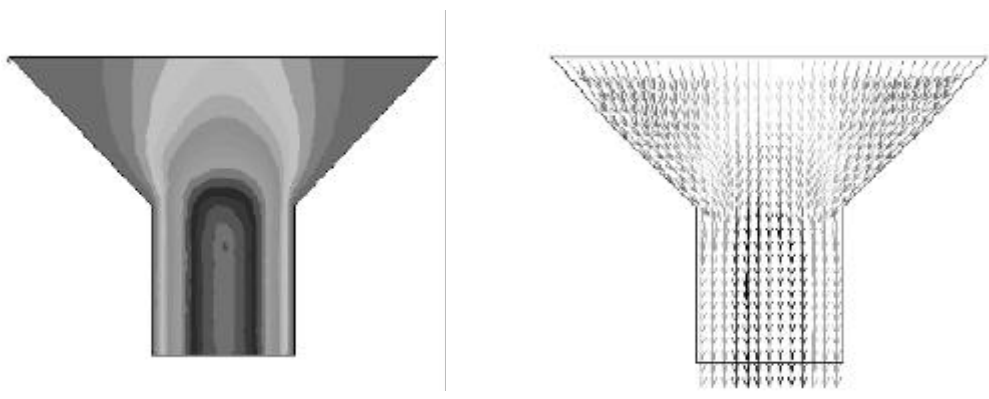


Figura 7: Escavação com utilização de duas linhas de tirantes

## 2.6 Fluxo viscoso por gravidade através de um funil

Neste problema, um líquido flui através de um funil sob a influência da gravidade e uma pressão no sentido descendente, sendo que a gravidade entra na equação diferencial parcial como uma força de massa. A Figura 8 mostra duas saídas obtidas do pós-processamento utilizando o software FlexPDE, onde é possível notar que a velocidade do líquido se anula nas paredes do funil (tons mais claros).

Por influência das paredes do funil a velocidade cresce atingindo um valor máximo no eixo vertical e maior na seção menor. Isto tudo é consistente com as leis de conservação da massa e da energia. A solução por elementos finitos adota a maior dimensionalidade (3D) utilizando as equações diferenciais da mecânica dos fluidos. Wang e Anderson (1982) e Verruijt (1982) apresentam vários problemas adicionais com as respectivas soluções numéricas.



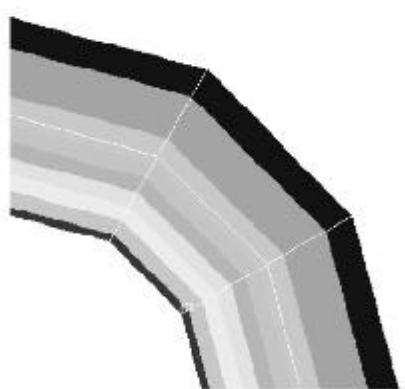
**Figura 8:** Velocidade de fluxo de fluido em funil sob influência da gravidade

## 2.7 Fluxo de temperatura em condição estacionária

Neste problema é apresentada a distribuição de temperatura em um cilindro de aço com comprimento muito longo e temperatura interna superior à temperatura externa proporcionando um fluxo para o exterior. Para manter o fluxo é necessário que a temperatura no interior do cilindro seja mantida constante e superior à temperatura externa.

Para modelar o fenômeno por elementos finitos utilizou-se o programa Ansys. Tendo em vista a simetria pelos eixos coordenados adotou-se apenas um quarto da seção circular do cilindro. O fluido entre as paredes internas do cilindro permite o fluxo de calor por convecção. A Figura 9 mostra uma tela de resultados gerada pelo programa Ansys, onde se verificam as diferenças de temperatura do interior para o exterior (tonalidades de cores diferentes), caracterizando um fluxo radial de calor.

O problema aqui apresentado tem solução teórica obtida sem a necessidade da utilização do método dos elementos finitos. O objetivo é mostrar que a capacidade dos programas com base no MEF não distingue uma solução simples de uma solução onde não se tem o resultado analítico.

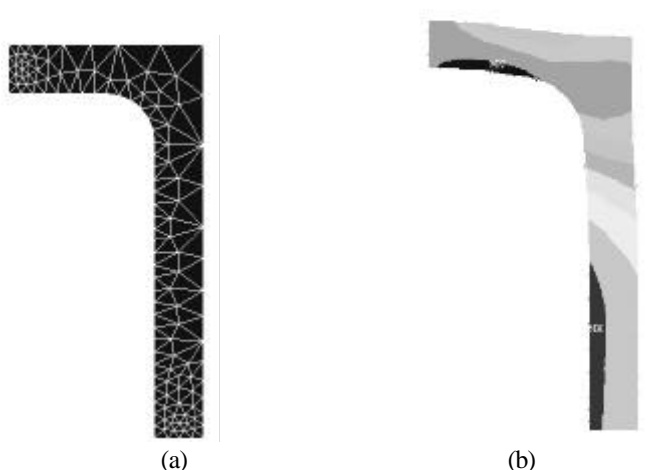


**Figura 9:** Distribuição de temperatura em um cilindro

### 2.8 Aplicação de pressão interna em um cilindro

Um cilindro de aço submetido a uma pressão no seu interior e com espessura das paredes necessárias para manter a peça submetida à condição de equilíbrio em regime elástico. Novamente utiliza-se o programa Ansys para modelar o comportamento tensão-deformação.

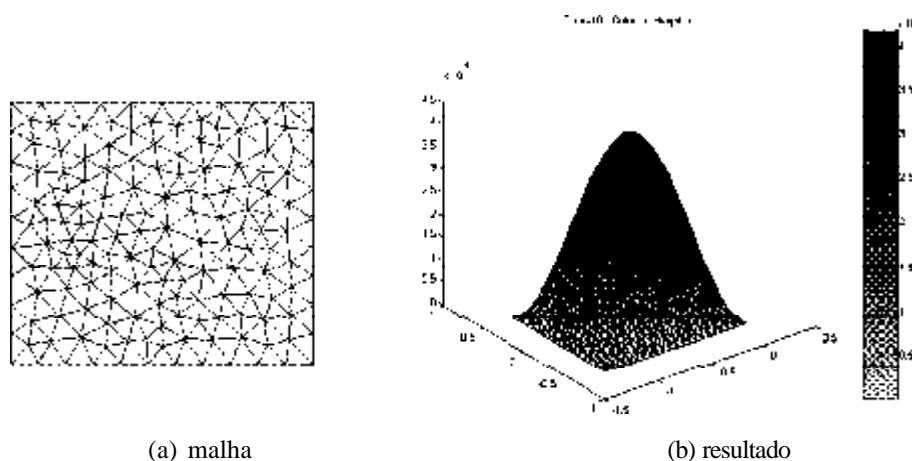
Como se observa na Figura 10, na malha de elementos finitos utilizou-se uma seção de tal forma a considerar o comportamento axissimétrico com o eixo vertical de revolução e modelando apenas a metade do cilindro tendo em vista a simetria de eixos. Neste caso, embora a peça seja tridimensional, é possível realizar a análise com a modificação dos tipos de coordenadas, conforme condição exigida para uma análise axissimétrica. Na Figura 10 também se verifica a deformação do cilindro.



**Figura 10:** Cilindro submetido a pressão interna. (a) malha; (b) deformação

### 2.9 Solução de equação diferencial parcial do tipo parabólica

Existem vários fenômenos transientes que podem ser modelados através da solução de equações diferenciais parciais do tipo parabólica (ver por exemplo Farlow, 1993). A Figura 11 mostra o resultado de uma análise por elementos finitos com a utilização da ferramenta pdetool do Matlab. A figura mostra a malha de elementos finitos gerada e os resultados da determinação da variável dependente em função de sua localização. Este problema pode ser utilizado, por exemplo, para variação de temperatura com o tempo. Um tipo de problema em que se tem a modelagem por equação parabólica é o adensamento dos solos, conforme solução numérica descrita por Al-Kafaji e Tooley (1986).



**Figura 11:** Solução de equação diferencial parcial tipo parabólica



### 2.10 Solução de equação diferencial parcial do tipo elíptica

Semelhante ao exemplo anterior é possível obter a solução rápida com a utilização do pde-tool do Matlab, agora para uma equação diferencial parcial tipo elíptica, como é o caso da equação de Laplace. Na Figura 12 observa-se a malha de elementos finitos gerada pelo Matlab com a existência de um vazio no interior do domínio.

Neste caso o fluxo se dá de acordo com as condições de fronteira impostas, e este é caracterizado pelos vetores que evitam a região do furo, conforme se pode ver também nesta figura. O problema pode ser interpretado através de vários fenômenos, como por exemplo, o fluxo de água em um meio poroso com esta geometria adotada.

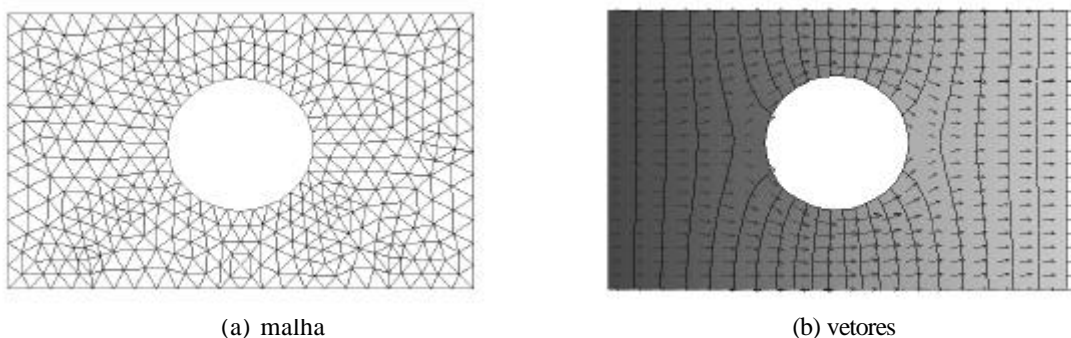


Figura 12: Solução de equação diferencial parcial tipo elíptica

### 2.11 Solução do ensaio brasileiro por elementos finitos

O ensaio brasileiro é utilizado para determinação da resistência a tração do concreto, de uma rocha, etc. Consiste na compressão de um corpo de prova cilíndrico colocado de forma a ser carregado diametralmente. Com o carregamento nestas condições ocorre a geração de tensões de tração no centro da amostra. Caso as tensões neste local venham a superar a resistência do material ocorrerá a ruptura por separação.

Na Figura 12 pode-se ver o desenho esquemático do ensaio. Na parte (b) da figura tem-se o resultado de ensaios de fotoelasticidade, onde se pode verificar a forma em que ocorre a distribuição na amostra. E, na parte (c) da figura tem-se os resultados através da utilização do método dos elementos finitos apresentado em Thompson, 2004. Os resultados da modelagem confirmam esta distribuição de tensões, conforme visto na figura.

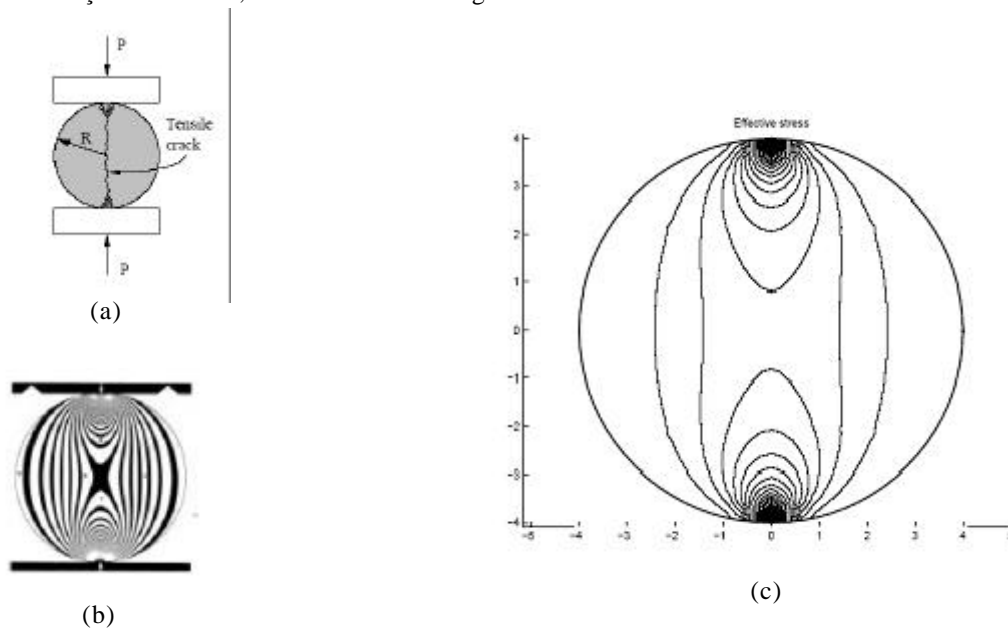


Figura 13 : Ensaio brasileiro de compressão diametral

## 2.12 Cálculo de recalques em fundação com radier através do método dos elementos finitos

Em fundações superficiais é possível substituir uma sapata isolada para cada pilar da edificação por uma estrutura de transmissão das cargas da edificação para o solo de fundação, através de uma placa flexível ou rígida associando todos os pilares a uma mesma fundação. A este tipo de solução usa-se a denominação de radier.

O cálculo do radier é função do subsolo e do tipo de estrutura (flexível ou rígida). O dimensionamento é realizado através da solução de equações diferenciais obtidas especialmente para este tipo de estrutura. Utiliza-se freqüentemente o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

O programa Elpla (Elastic PLate) foi desenvolvido especialmente para este tipo de estrutura. A partir dos ensaios de sondagens realizados, o programa faz uma interpolação entre os dados dos furos de sondagens, considerando desta forma na análise realizada.

A Figura 14 mostra uma fundação em radier com vigas de reforço sobre as linhas de carregamento da superestrutura. Nesta figura pode-se ver além das cargas os resultados obtidos pelo programa Elpla com cálculo dos recalques em vários pontos da placa.

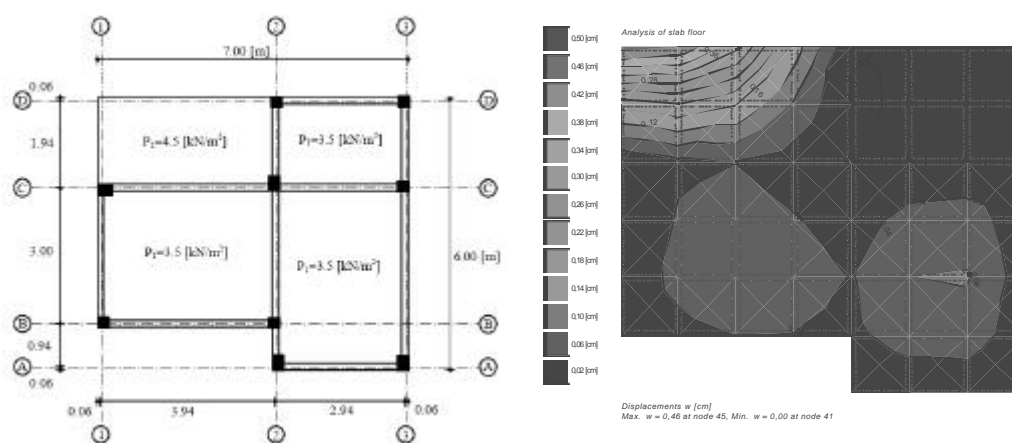


Figura 14: Cálculo de recalques em radier pelo método dos elementos finitos

## 3 Conclusão

O objetivo deste artigo foi apresentar de forma qualitativa a solução de vários problemas de engenharia com a utilização de softwares que utilizam o método dos elementos finitos. Propositadamente não foram apresentadas as formulações utilizadas pelos programas, sendo que os problemas foram apenas descritos utilizando a conceituação adotada em cada caso. Ao leitor interessado nas formulações utilizadas recomenda-se a leitura de Smith e Griffiths (1999).

Pode se verificar ao longo do artigo que a utilização do método dos elementos finitos tem se tornado uma grande ferramenta no auxílio do engenheiro no projeto, análise e construção de estruturas. Cada vez mais são disponibilizados novos softwares com mais recursos computacionais e que proporcionam a utilização correta do MEF retirando da exclusividade acadêmica para a utilização comercial.

## Referências

- AL-KHAFAJI, A. W.; TOOLEY, J. R. *Numerical methods in engineering practice*. New York: L. S. Fletcher, 1986. 642 p.
- BRITTO, A. M.; GUNN, M. J. *Critical state soil mechanics via finite elements*. New York: Ellis Horwood, 1991. 350p.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2002. 926 p.
- FARLOW, S. J. *Partial differential equations for scientists and engineers*. New York: Dover, 1993. 414 p.

- KRAHN, J. *Seepage modeling with Seep/w: an engineering methodology*. Calgary: Geo-Slope International, 2004. 398 p.
- SMITH, I. M.; GRIFFITHS, D. V. *Programming the finite element method*. 3rd ed. Padstow, Cornwall: John Wiley & Sons, 1999. 534 p.
- THOMPSON E. G. *An introduction to the finite element method: theory, programming and applications*. New York: John Wiley & Sons, 2005. 343 p.
- VALLIAPAN, S. *Continuum mechanics fundamentals*. Rotterdam: A. A. Balkema, 1981. 228 p.
- VERRUIJT, A. *Groundwater flow*. 2nd ed. New York: Macmillan, 1982. 144 p.

## **SOBRE O AUTOR**

### **Francisco Chagas da Silva Filho**

Engenheiro Civil pela Universidade de Fortaleza em 1986. M.Sc., Dr. e Pós-Dr. em Eng. Civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Atualmente ocupa o posto de professor titular da Universidade de Fortaleza, onde atua em nível de graduação e pós-graduação.