

## **Análise comparativa das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em Scilab**

*Comparative Analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko Theories by Finite Difference Method with Computational Implementation in Scilab*

*Análisis Comparativo de las Teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko vía Método de las Diferencias Finitas con Implementación Computacional en Scilab*

*Analyse comparative entre la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko avec la méthode des différences finies avec implémentation informatique en utilisant le Scilab*

**Calebe Paiva Gomes de Souza**  
calebepaiva@ufpi.edu.br  
Universidade Federal do Piauí - UFPI

**Gustavo Guimarães Cruz**  
ggcengc@gmail.com  
Universidade Federal do Piauí - UFPI

### **Resumo**

A viga é um dos principais elementos estruturais utilizados na Engenharia Civil, e apresenta a deflexão como principal característica. Esta é regida por teorias que se embasam na manutenção da seção da viga. Dentre as teorias, as mais utilizadas são a de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A equação diferencial resultante de ambas torna possível a utilização de métodos numéricos. Entre esses métodos numéricos, destaca-se o método das diferenças finitas, transformando equações do meio contínuo para o meio discreto, implementado em Scilab. Em relação às teorias, para uma razão comprimento-altura alta e carga aplicada de grande magnitude, existe coincidência entre ambas as teorias, sendo desprezível a parcela da tensão cisalhante na viga. Mas para relação muito baixa para cargas com valores elevados, observa-se uma discrepância entre as curvas de deflexão entre as teorias, bem como uma diferença entre o valor estipulado intuitivamente e o apresentado para uma carga concentrada

**Palavras-chave:** Viga. Euler-Bernoulli. Timoshenko. Método das Diferenças Finitas. Scilab.

### **Abstract**

The beam is one of the main structural elements used in Civil Engineering, and presents the deflection as the main characteristic. This is governed by theories that are based on the maintenance of the section of the beam. Among the theories, the most used are Euler-Bernoulli and Timoshenko ones. The differential equation resulting from both makes possible the use of numerical methods. Among these numerical methods, the Finite Differences Method is highlighted, transforming equations from the continuous medium to the discrete medium, implemented in Scilab. Regarding the theories, for a high length-height ratio and applied load of great magnitude, there is a coincidence between both theories, being negligible the portion of shear stress in the beam. But for a very low ratio for loads with high values, there is a discrepancy between the deflection curves between the theories, as well as a difference between the value stipulated intuitively and that presented for a concentrated load.

**Keywords:** Beam. Euler-Bernoulli. Tymoshenko. Finite Differences Method. Scilab.

### **Resumen**

La viga es uno de los principales elementos estructurales utilizados en la ingeniería civil, y presenta la deflexión como principal característica. Esta es regida por teorías que se basan en el mantenimiento de la sección de la viga. Entre las teorías, las más utilizadas son la de Euler-Bernoulli y de Timoshenko. La ecuación diferencial resultante de ambas hace posible la utilización de métodos numéricos. Entre

estos métodos numéricos, se destaca el Método de las Diferencias Finitas, transformando ecuaciones del medio continuo hacia el medio discreto, implementado en Scilab. En cuanto a las teorías, para una razón longitud-altura alta y carga aplicada de gran magnitud, existe coincidencia entre ambas teorías, siendo despreciable la parte de la tensión cizallante en la viga. Pero para una relación muy baja para cargas con valores elevados, se observa una discrepancia entre las curvas de deflexión entre las teorías, así como una diferencia entre el valor estipulado intuitivamente y el presentado para una carga concentrada

**Palabras-clave:** Viga. Euler-Bernoulli. Timoshenko. Método de las Diferencias Finitas. Scilab.

### Résumé

La poutre est l'un des principaux éléments structuraux utilisés chez le Génie Civil. Elle présente la déviation comme caractéristique principale. Cela est régie par des théories qui s'appuient sur la maintenance de la section de la poutre. Parmi les théories, les plus utilisées sont celles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. L'équation différentielle résultante des deux théories permet d'utiliser des méthodes numériques. Parmi ces méthodes numériques, on met en évidence la méthode des différences finies, qui transforme les équations du milieu continu au milieu discret, implémentés en utilisant le Scilab. Ce qui concerne les théories, pour un ratio de longueur et hauteur versus la charge appliquée de grand magnitude, les deux théories s'accordent. C'est, donc, méprisable la parcelle de la contrainte de cisaillement dans la poutre. Néanmoins, quand le rapport est très faible dans les charges des valeurs élevées, il y a une divergence entre les courbes de déviation entre les théories, ainsi qu'une différence entre la valeur prescrite de façon intuitive et celle présentée à une charge concentrée.

**Mot-Clés:** Poutre. Euler-Bernoulli. Timoshenko. Méthode des Différences Finies Scilab.

## 1 Introdução

Na Engenharia Civil, a viga é um dos elementos estruturais mais importantes, sendo necessário o conhecimento de suas propriedades e comportamento. No estudo deste comportamento, depara-se com expressões matemáticas ou equações diferenciais necessárias para a análise e busca das respostas.

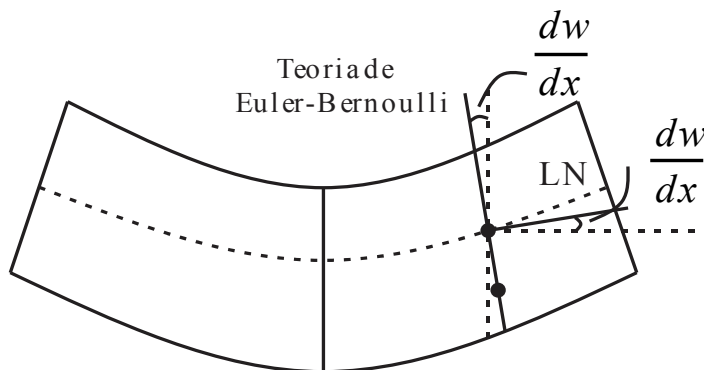
Porém existe uma complexidade dos métodos analíticos, uma vez que a aproximação da realidade gera dificuldades em monitoramento dos parâmetros do problema (BORGES; PADOIN, 2006). Para a resolução desses problemas, recorre-se a simplificações dos modelos matemáticos, que, apesar do negligenciamento dos resultados reais, é o suficiente para resolver certos problemas práticos importantes para áreas tecnológicas, como a Engenharia Civil.

Assim, para o cálculo do deslocamento vertical (deflexão) da viga, geram-se modelos matemáticos no meio contínuo. Surge, dessa forma, teorias que se diferem dependendo da complexidade. Dentre as teorias existentes, destacam-se duas: a de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

A teoria de Euler-Bernoulli (TEB) é a mais simples e comumente utilizada na prática. Conforme Silva e Silva (2010, p. 1804), adotando-se um campo de deslocamentos, implica nas hipóteses de que uma linha reta e normal à superfície neutra permanecerá reta e normal após a deformação da peça (Fig. 1). Esta implicação, porém, negligencia os efeitos de Poisson na viga.

Além disso, esta assume que o deslocamento lateral é nulo, bem como as deformações verticais em todos os pontos da mesma seção transversal são pequenos e iguais ao eixo da viga.

**Figura 1** – Modelo de viga de Euler-Bernoulli.



Fonte: Elaborado pelos autores. (2017).

Seguindo as hipóteses expostas na determinação da equação da linha elástica, a TEB assume, para um carregamento externo, a seguinte característica (SILVA, S.; SILVA, W., 2010, p. 1804):

$$M = -EI \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \tag{1}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = -EI \cdot \frac{d^3w}{dx^3} \tag{2}$$

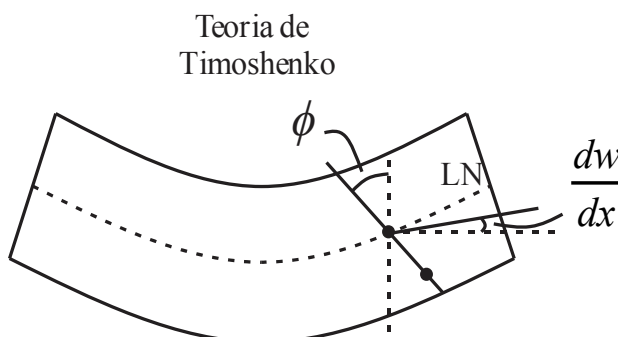
$$q = \frac{d^2M}{dx^2} = -EI \cdot \frac{d^4w}{dx^4} \tag{3}$$

Onde  $M$ ,  $V$  e  $q$  representam, respectivamente, o momento fletor, o esforço cortante e a taxa de carga atuante na viga;  $E$  o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia e  $w$  a deflexão ao longo do eixo  $x$ .

Também conhecida no meio científico como *First Shear Theory Deformation* (FSTD) por ser a primeira a considerar os efeitos de cisalhamento, embasa-se na TEB, porém com diferenças básicas, apresentadas por Nascimento (2005, p. 46) e enumeradas abaixo:

1. Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma mesma seção transversal são pequenos e iguais ao eixo da viga;
2. O deslocamento lateral é nulo;
3. As seções planas normais para o eixo da viga antes da deformação se mantêm planas, porém não necessariamente normais ao eixo depois da deformação.

**Figura 2** – Modelo de viga de Timoshenko.

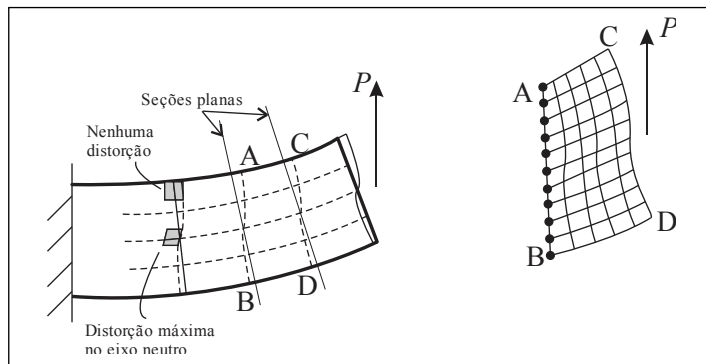


Fonte: Elaborado pelos autores. (2017).

Silva (2010, p. 1804) mostra que essa teoria leva em consideração as forças cisalhantes pela introdução de um fator de correção.

Essa teoria representa de forma mais realista o comportamento de uma viga real, pois, segundo Balan e Popov (2000, p. 432), para uma viga de altura considerável, curta e com perturbações nos pontos de aplicação das cargas, as seções não permanecem planas (Fig. 3).

**Figura 3** – Análise das seções de uma viga com relação altura-comprimento elevada, com empenamento das mesmas pela aplicação da carga.



Fonte: Elaborado pelos autores. (2017).

Da figura 3, Silva (2010, p. 1804) demonstra as equações governantes do carregamento externo e do momento fletor:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (4)$$

$$\frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (5)$$

$$M = -EI \frac{d\phi}{dx} \quad (6)$$

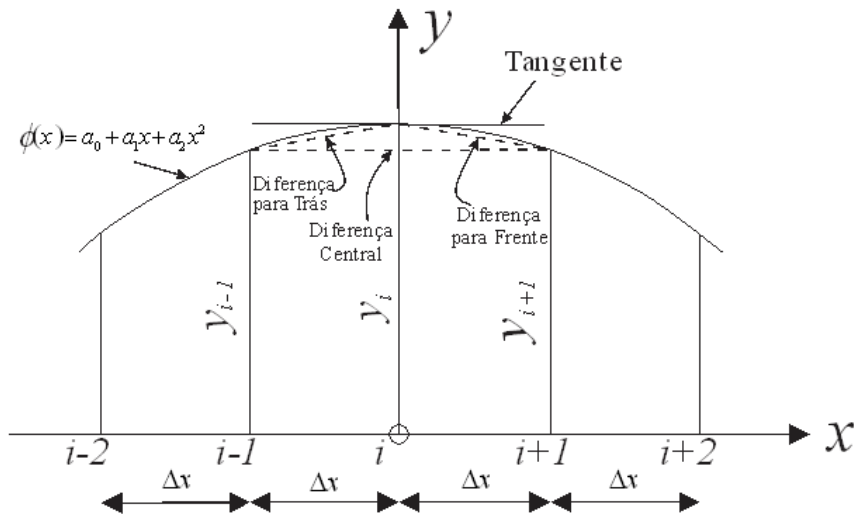
$$V = GAK_s \left( \phi + \frac{dw}{dx} \right) \quad (7)$$

Onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal;  $A$  é a área da seção;  $\phi$  o ângulo adicional devido ao efeito cisalhante; e  $K_s$  é o fator de correção ao cisalhamento, que depende da forma geométrica da seção.

Nos problemas de Engenharia, especialmente a abordagem feita até o momento, é possível formular e transformar esses problemas em equações matemáticas que os regem. Geralmente, se obtém resultados analíticos, isto é, as equações que governam são diferenciais que, dependendo da complexidade, podem ser difíceis, ou até impossíveis, de serem encontradas na prática (SZILARD, 2004).

O método das diferenças finitas, enquanto método numérico, possibilita ao profissional trabalhar com situações complexas, além disso é um dos métodos mais simples em relação a outros, como o método dos elementos finitos e o método dos resíduos ponderados (DEUS et al, 2010, p.10).

**Figura 4** – Esquema de uma função  $\phi(x)$ , divididos em faixas igualmente espaçadas, representando as diferenças finitas.



Fonte: Elaborado pelos autores. (2017).

Desse modo, usando intervalos entre os pontos, o polinômio pode ser expresso por:

$$\phi(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(\Delta x)} \cdot x + \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{x^2}{2} \quad (8)$$

Logo:

$$\phi'(x) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(\Delta x)} + \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \cdot x \quad (9)$$

Assim, pela figura 4, aproximando-se a primeira derivada da função original:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_i = [\phi'(x)]_i = \frac{1}{2(\Delta x)}(y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (10)$$

Logicamente, a expressão da diferença finita para segunda derivada é:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]_i \approx \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) = \phi''(x)_i = \frac{1}{(\Delta x)^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \quad (11)$$

Considerando as equações diferenciais que regem as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, pode-se aplicar as diferenças finitas de forma particular, relacionando-as com as expressões de cada uma. Para a expressão de Euler-Bernoulli, temos a seguinte expressão:

$$\frac{d^2w_i}{dx^2} = -\frac{M_i}{EI} = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (12)$$

Já para a teoria de Timoshenko, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2} = \left(\frac{-q_i}{GAK_s} + \frac{M_i}{EI}\right) \quad (13)$$

Desse modo, para ambas as teorias se desenvolve um sistema linear formado pelas matrizes apresentadas abaixo:

$$[A] \cdot [W] = [F] \tag{14}$$

Donde:

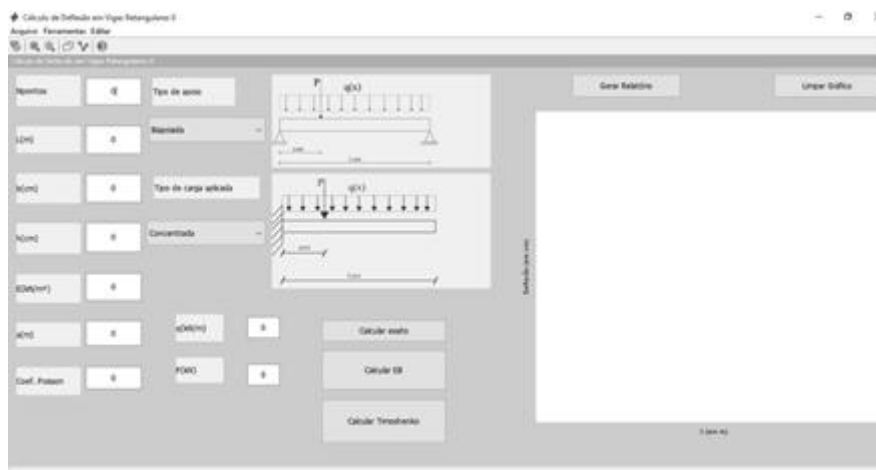
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ é a matriz de coeficientes das diferenças finitas;}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \text{ é a matriz deflexão;}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \text{ é a matriz de esforços internos.}$$

No desenvolvimento do algoritmo, a interface gráfica do usuário (GUI) foi elaborada no Scilab, a fim de facilitar a inserção de dados, bem como a saída de dados gráficos e relatórios.

**Figura 5** – Janela principal da GUI.



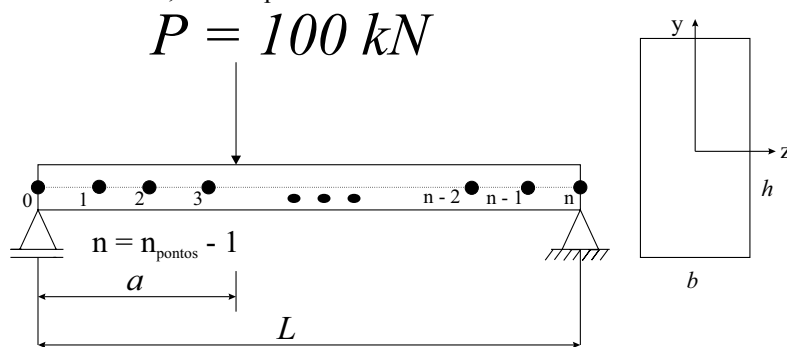
Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

## 2 Resultados e discussão

Na construção do algoritmo na obtenção das deflexões de vigas para as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko por meio das diferenças finitas, bem como seus resultados, levou-se em consideração os seguintes aspectos:

1. Vigas com características homogêneas e isotrópicas, com seção transversal retangular, bem como isostáticas;
2. No valor analítico, considerou-se a TEB no meio contínuo, sendo obtido por integração direta.

**Figura 6** – Esquema de uma viga simplesmente apoiada, com carregamento concentrado, com os pontos nodais característicos.

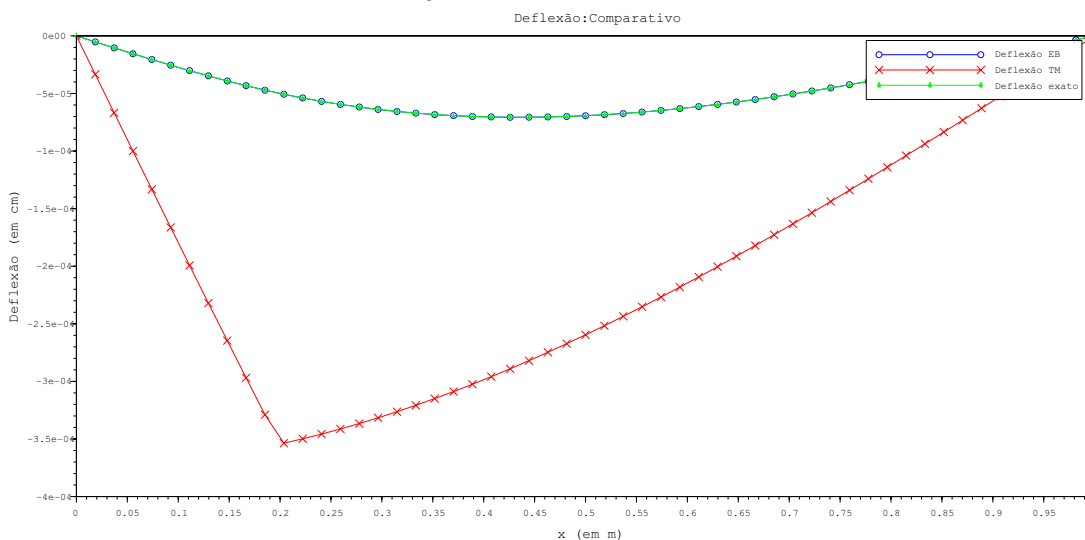


Fonte: Elaborada pelos autores (2017).

Para o primeiro exemplo, com viga disposta conforme a . 7, considerou-se uma viga de 1 m, com seção transversal com 10 cm de base e 100 cm de altura, módulo de elasticidade  $2,05 \cdot 10^8$  kN/m<sup>2</sup> (Aço isotrópico), coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , carga concentrada de 100 kN de intensidade e aplicada a uma distância  $a$  de 0,2 m ( $L/5$ ) em relação ao primeiro apoio.

Com os dados acima e utilizando o programa desenvolvido, tem-se a fig. 7 abaixo:

**Figura 7** – Comparativo entre as teorias para uma viga simplesmente apoiada com carregamento concentrado,  $L = 1$  m,  $h = 10b$  e  $n_{\text{pontos}} = 55$ .



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

**Tabela 1** – Valores de deflexão das teorias de vigas e erro relativo para uma viga com carregamento concentrado, com  $L = 1$  m e  $h = 10b$ .

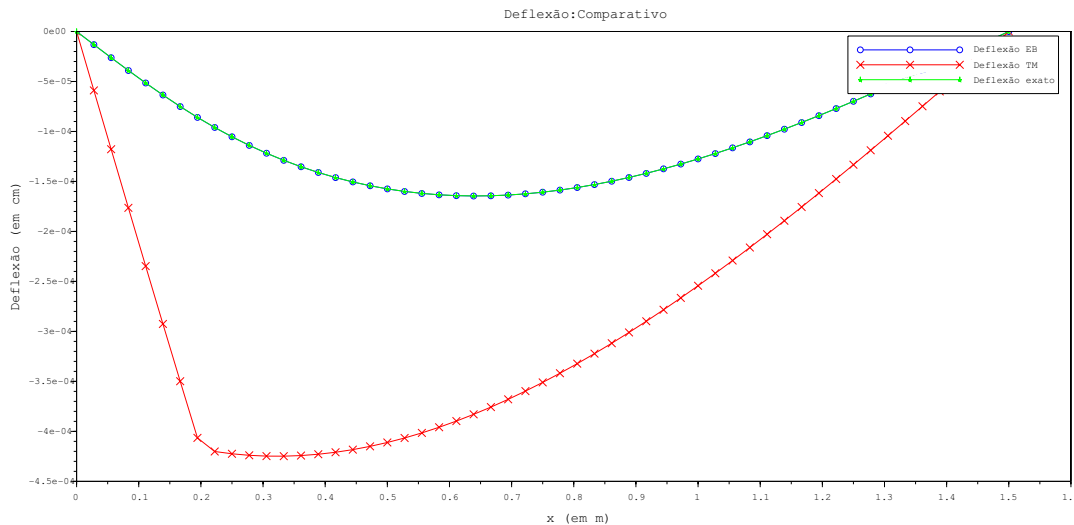
$n_{\text{pontos}}$	Deflexão para $x = L/2$					
	EB-Analítica (cm)	EB-MDF (cm)	TM -MDF (cm)	Erro Relativo EB (%)	Erro Relativo TM (%)	Tempo de execução (s)
55	0,00007	0,00007	0,00026	0,00	271,43	1,0907

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Com os resultados acima, percebe-se que a curva de Timoshenko (TM) se apresenta com a angulosidade característica e observa-se que a deflexão máxima ocorre, praticamente, no ponto de aplicação da carga, o que ocorre nos casos comuns de viga, onde o máximo ocorre depois da aplicação da carga concentrada, e a convergência entre as curvas via MDF e analítica da TEB é praticamente máxima.

No segundo exemplo, adota-se uma viga com as mesmas características da anterior, exceto pelo comprimento de 1,5 m. Assim, tem-se a fig. 8:

**Figura 8** – Comparativo entre as teorias para uma viga simplesmente apoiada com carregamento concentrado,  $L = 1,5$  m,  $h = 10b$  e  $n_{\text{pontos}} = 55$ .



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

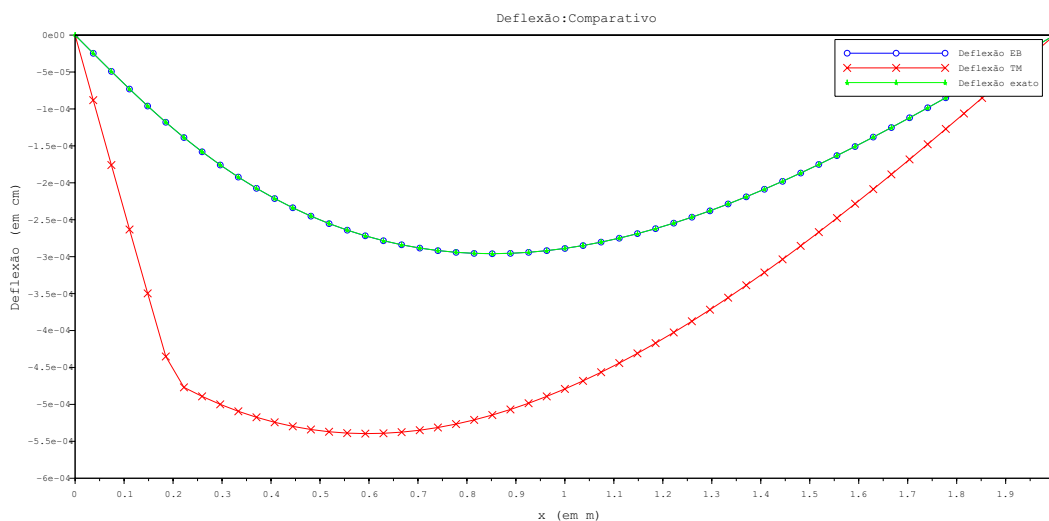
**Tabela 2** – Valores de deflexão das teorias de vigas e erro relativo para uma viga com carregamento concentrado, com  $L = 1,5$  m e  $h = 10b$ .

Deflexão para $x = L/2$						
$n_{\text{pontos}}$	EB-Analítica (cm)	EB-MDF (cm)	TM -MDF (cm)	Erro Relativo EB (%)	Erro Relativo TM (%)	Tempo de execução (s)
55	0,00016	0,00016	0,00035	0,00	118,75	1,5160

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Agora, para uma terceira situação, adota-se uma relação comprimento-altura de 2 ( $L = 2$ m), onde obtém-se a fig. 9:

**Figura 9** – Comparativo entre as teorias para uma viga simplesmente apoiada com carregamento concentrado,  $L = 2$  m,  $h = 10b$  e  $n_{\text{pontos}} = 55$ .



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).



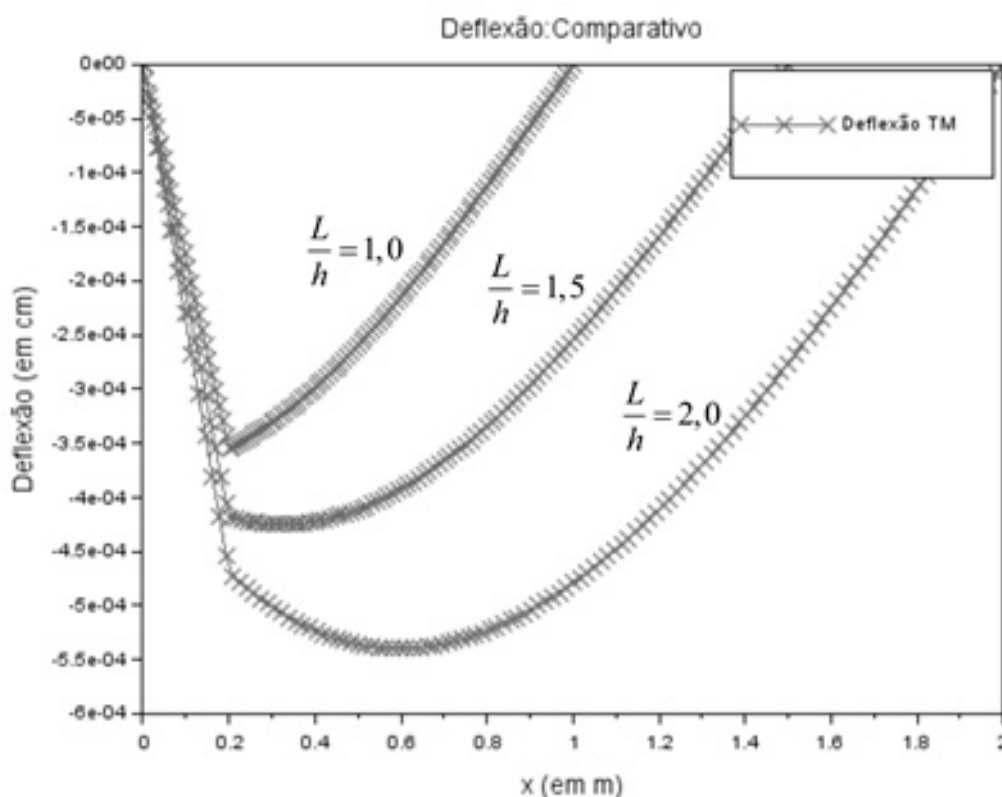
**Tabela 3** – Valores de deflexão das teorias de vigas e erro relativo para uma viga com carregamento concentrado, com  $L = 2$  m e  $h = 10b$ .

Deflexão para $x = L/2$						
$n_{\text{pontos}}$	EB-Analítica (cm)	EB-MDF (cm)	TM -MDF (cm)	Erro Relativo EB (%)	Erro Relativo TM (%)	Tempo de execução (s)
55	0,00029	0,00029	0,00048	0,00	65,52	1,4910

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Assim, notam-se as diferenças entre as curvas à medida que a relação aumenta, uma vez que a deflexão máxima ocorre no ponto de aplicação da carga, um resultado não esperado intuitivamente, uma vez que os gráficos da teoria de Euler-Bernoulli mostram que a deflexão máxima ocorre depois do ponto de aplicação. Mas, à medida que a relação aumenta, a deflexão máxima se mostra de forma esperada, afastando-se do ponto de aplicação.

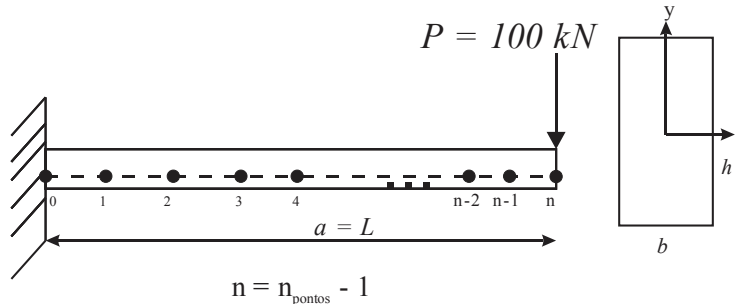
**Figura 10** – Comparativo entre as curvas de Timoshenko para as diferentes relações comprimento-altura da viga.



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

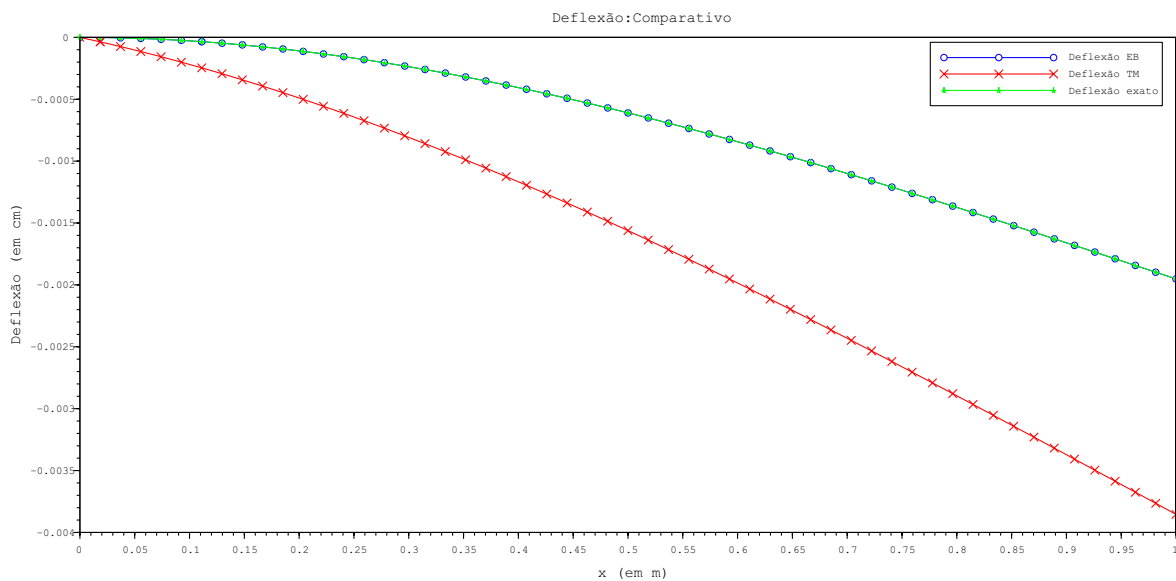
No próximo exemplo, utilizou-se uma viga engastada, com comprimento de 1 m e constando as mesmas características físicas da anterior.

**Figura 11** – Esquema de uma viga engastada com carregamento concentrado, com os pontos nodais característicos.



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

**Figura 12** – Comparativo entre as teorias para uma viga engastada com carregamento concentrado,  $L = 1$  m,  $h = 10b$  e  $n_{\text{pontos}} = 55$ .



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

**Tabela 4** – Valores de deflexão das teorias de vigas e erro relativo para uma viga engastada com carregamento concentrado, com  $L = 1$  m e  $h = 10b$ .

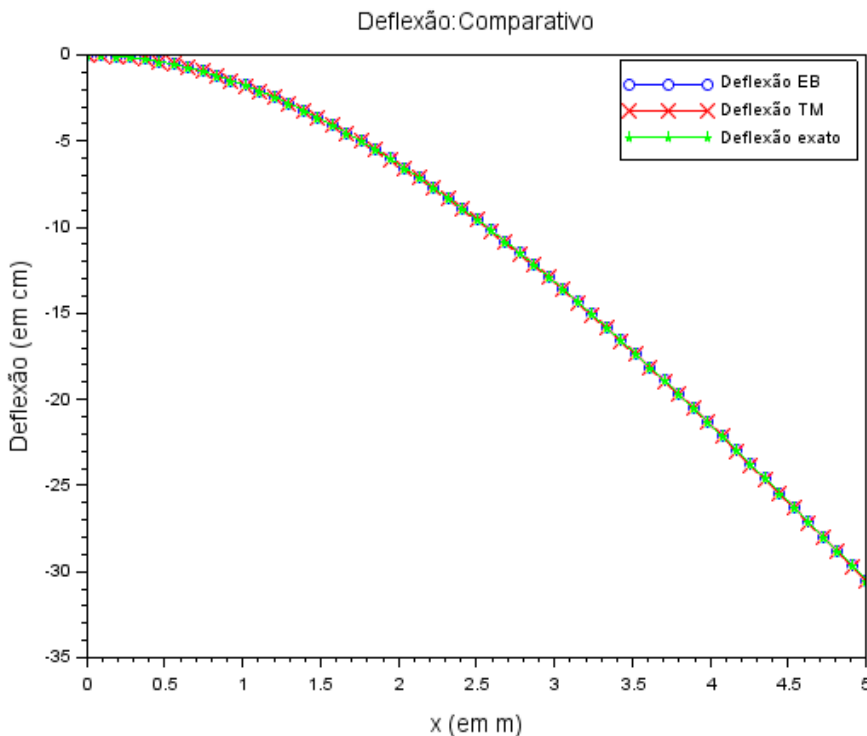
$n_{\text{pontos}}$	Deflexão para $x = L$				Erro Relativo EB (%)	Erro Relativo TM (%)	Tempo de execução (s)
	EB-Analítica (cm)	EB-MDF (cm)	TM -MDF (cm)				
55	0,00195	0,00195	0,00385	0,00	97,44	1,5470	

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Observa-se a mesma situação para a viga simplesmente apoiada, com relação comprimento-altura baixo, reforçando a atuação do cisalhamento na seção.

A figura 13 refere-se à viga engastada com comprimento de 5 m, em que a relação comprimento-altura passa a ser 5, mostrando que as curvas de deflexão de cada teoria praticamente se convergem.

**Figura 13** – Comparativo entre as teorias para uma viga engastada com carregamento concentrado,  $L = 5$  m e  $n_{\text{pontos}} = 55$ .



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

**Tabela 4** – Valores de deflexão das teorias de vigas e erro relativo para uma viga engastada com carregamento concentrado, com  $L = 5$  m.

$n_{\text{pontos}}$	Deflexão para $x = L$					
	EB-Analítica (cm)	EB-MDF (cm)	TM -MDF (cm)	Erro Relativo EB (%)	Erro Relativo TM (%)	Tempo de execução (s)
55	0,2439	0,2439	0,25346	0,00	3,92	1,9370

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

#### 4 Conclusão

Portanto, a utilização do Scilab tornou possível a visualização dos gráficos e dos valores, de modo a chegar aos resultados do alvo principal do trabalho proposto: comparar as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Uma vez gerados os dados de saída, simulando as diferentes condições de carregamento, apoios e dimensões, constatou-se que, para uma viga de comprimento considerável e para uma carga com elevada magnitude, as curvas de deflexão entre as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko praticamente coincidem, com um leve aumento de valor da segunda teoria devido a atuação dos efeitos de cisalhamento.

Em relação a uma viga curta com baixa relação comprimento-altura e cargas de elevada magnitude, observou-se que os efeitos de Poisson, consideradas na TT, são de grande relevância, uma vez que as curvas de deflexão da mesma, em relação a TEB, foram bem distintas, principalmente para cargas aplicadas de forma concentrada, reforçando o que a literatura demonstrava, inclusive com vigas-parede, que apresentaram valores diferentes dos estipulados intuitivamente. A máxima deflexão aconteceu no ponto de aplicação da carga, embora à medida que se aumenta a relação entre o comprimento e a altura, a deflexão máxima se aproxima da localização prevista.

## Referências

- BALAN, Toader A.; POPOV, Egor P. **Mecânica de sólidos**. 2. ed. México: Pearson Educación, 2000.
- BORGES, Pedro Augusto Pereira; PADOIN, Edson L. Exemplos de métodos computacionais aplicados a problemas na modelagem matemática. **ERAD**, Ijuí, p. 5-20, jan. 2006.
- DEUS, L. R. et al. **MDF**: conceitos básicos e algumas aplicações na engenharia estrutural. Belo Horizonte: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2010.
- GERE, James M. **Mecânica dos materiais**. São Paulo: Thomson, 2003.
- KOCATÜRK, Turgut; ŞİMŞEK, Mesut. Free vibration analysis of beams by using a third-order shear deformation theory. **Sadhana**, Índia, v. 32, p. 167-179, jun. 2007.
- MACHADO, Fernando Carlos Scheffer. **Análise computacional Via MDF de cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato**. 2013. 114 f. Tese (Doutorado em Construção Civil, Construção Metálica) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.
- MARTHA, Luiz Fernando. **Ftool**: two-dimensional frame analysis tool. Disponível em: <<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/>>. Acesso em: 05 maio 2014.
- NASCIMENTO, Rangel Ferreira do. **Análise dinâmica de vigas utilizando o Elemento Finito de Timoshenko com Refinamento P-Adaptativo**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2005.
- SILVA, Sebastião S.; SILVA, William T. M. Estudo de pórticos planos utilizando um elemento finito de viga unificado em um programa de análise linear. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional**, Santa Fe, v. XXIX, n. 17, p. 1803-1815, nov. 2010.
- SILVA, Selênio Feio da. O Método das diferenças finitas aplicado á viga de Euler: Comportamentos estático e dinâmico. **Traços**, Belém, v. 10, n. 21, p. 9-22, jun. 2008.
- SZILARD, Rudolph. **Theories and applications of plate analysis**: classical, numerical and engineering methods. Nova Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2004.

## Sobre os autores

### Calebe Paiva Gomes de Souza

Engenheiro Civil pela Universidade Federal do Piauí – UFPI, Mestre em Engenharia Civil, área de Estruturas, Universidade Federal de São Paulo – USP. Professor efetivo na área de Estruturas na Universidade Federal do Piauí.

### Gustavo Guimarães Cruz

Engenheiro Civil pela Universidade Federal do Piauí – UFPI. Professor substituto na área de Estruturas na Universidade Federal do Piauí - UFPI.

*Recebido em: 09/05/2018*

*Avaliado em: 05/06/2018*

*Aceito em: 05/06/2018*