

## Modelagem de cascas abatidas através do MEC

### Eduardo T. De Lima Junior

Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Av. Trabalhador São Carlense, 400 – São Carlos/SP, Brasil  
– CEP 13566-590 edut@sc.usp.br

### Wilson S. Venturini

Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Av. Trabalhador São Carlense, 400 – São Carlos/SP, Brasil  
– CEP 13566-590  
venturin@sc.usp.br  
<http://www.set.eesc.usp.br/docentes/venturini>

### Resumo

O presente trabalho trata da análise numérica de cascas abatidas a partir do Método dos Elementos de Contorno (MEC). A formulação é desenvolvida a partir do acoplamento entre as equações integrais dos problemas de flexão de placas delgadas e de estado plano de tensão. As integrais sobre o domínio são avaliadas com aproximação das variáveis sobre células discretas. A validação do modelo desenvolvido é feita com base em resultados analíticos, além de valores obtidos com uso dos métodos dos elementos finitos e dos elementos de contorno.

**Palavras-chave:** *Mecânica das estruturas. Mecânica computacional. Método dos elementos de contorno. Cascas.*

### Abstract

The present work deals with the numerical analysis of shallow shells using Boundary Element Method (BEM). The formulation is developed by coupling integral equations of plate bending and plane stress elasticity. In the implemented scheme, the boundary terms are evaluated with analytical and numerical processes of integration. In the case of domain integrals, a semi-analytical calculation procedure is applied on discrete cells. The validation of developed computational model is made with results from other works, obtained by the use of BEM or finite element method, besides some analytical solutions.

**Keywords:** *Structural mechanics. Computational mechanics. Boundary element method. Shallow shells.*

## 1 Introdução

Cascas abatidas são elementos estruturais amplamente empregados em vários setores produtivos, podendo-se citar os painéis utilizados em carenagens de veículos nas indústrias aeronáutica, mecânica e naval, além de estruturas da construção civil, especialmente as de cobertura. Newton & Tottenham (1968) apresentaram a primeira aplicação do método dos elementos de contorno ao problema de cascas abatidas, com um método semi-direto baseado na decomposição da equação governante de 4ª ordem em uma de 2ª ordem. A obtenção de soluções fundamentais para o problema foi objeto de estudo de alguns pesquisadores ao longo dos anos. Lu & Huang (1991, 1992) deduziram a solução fundamental para cascas abatidas com superfície média quadrática, considerando cisalhamento. Dentre outros trabalhos, também trataram dessas deduções Matsui & Matsuoka (1978) e Lei *et al.* (1995). A aplicação direta do MEC implica na necessidade de existência das soluções fundamentais, que, nos problemas de casca, resultam significativamente complexas. Desta forma, um outro tipo de aproximação foi desenvolvido, o chamado *domain-boundary element method* (DBEM), sendo apresentado inicialmente por Forbes & Robinson (1969) na análise estática de cascas abatidas. Zhang & Atluri (1986) estenderam o método à análise dinâmica, com base no método dos resíduos ponderados. Com auxílio do teorema da reciprocidade, Providakis & Beskos (1991) formularam o método para problemas com vibrações. Mostrou-se a possibilidade de análise não-linear geométrica em Lin & Long (1996). A principal qualidade do DBEM é a simplicidade das soluções fundamentais requeridas, quando comparado com a aplicação direta da solução fundamental de cascas. Porém, deve-se destacar que, devido aos termos de curvatura presentes nas equações de equilíbrio, surgem integrais de domínio, as quais necessitam de tratamento relativamente custoso.

Com filosofia similar à utilizada no DBEM, Dirgantara & Aliabadi (1999) propuseram uma nova formulação, feita com base no acoplamento das equações integrais para flexão de placas e das equações integrais para o problema de estado plano de tensão, para analisar cascas com dupla curvatura, considerando cisalhamento. Wen *et al.* (2000, 2000) apresentaram uma formulação, também acoplada, com base na teoria de cascas abatidas, em que os deslocamentos de membrana e as deflexões e rotações de placa foram interpretados com funções radiais. As integrais de domínio são tratadas com a técnica de reciprocidade dual. Em 2002, Wen *et al.* consideraram as cascas com enrijecedores, os quais foram modelados pela teoria de vigas curvas. Dirgantara & Aliabadi (2003) introduziram não linearidade geométrica no problema de casca abatida com dupla curvatura.

Propõe-se aqui uma formulação do MEC, deduzida a partir do teorema da reciprocidade de Betti, com base no acoplamento das equações integrais dos problemas de flexão de Kirchhoff e de estado plano de tensão. O contorno é discretizado em elementos lineares isoparamétricos, e células lineares são utilizadas para avaliar os termos de domínio.

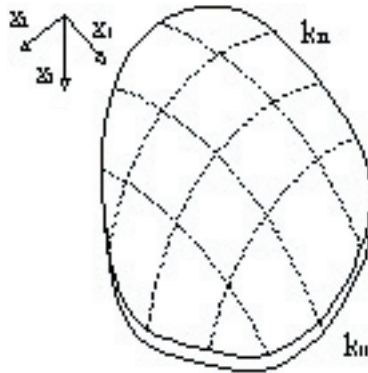
## 2 Cascas delgadas abatidas

Entende-se por casca o elemento estrutural curvo dotado de uma dimensão significativamente pequena, em relação às outras duas dimensões e aos raios principais de curvatura, e submetido aos efeitos de flexão e membrana. O local dos pontos equidistantes das duas superfícies que delimitam a casca é chamado superfície média, sobre o qual fazem-se as principais suposições e análises. O efeito de flexão é semelhante ao sofrido por uma placa, enquanto a parcela de membrana está ligada a deformações do plano médio da casca nesta mesma superfície.

Serão admitidas aqui cascas com curvaturas principais  $K_{11}$  e  $K_{22}$  apenas, nas duas direções coordenadas, definidas por:

$$K_{11} = \frac{1}{R_{11}}, K_{22} = \frac{1}{R_{22}}$$

sendo  $R_{ii}$  o raio de curvatura da casca referente à direção  $i$ . Os termos de curvatura mista  $K_{12}$ ,  $K_{21}$  são nulos.



**Figura 1:** Casca com curvaturas principais indicadas

As cascas podem ser classificadas em delgadas ou espessas, com base na relação entre sua espessura  $h$  e o raio de curvatura  $R$ . Segundo Novozhilov (1964), a esbeltez da casca pode ser definida pela inequidade:

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}$$

Admite-se uma casca, com superfície média definida por:

$$x_3 = x_3(x_1, x_2)$$

que pode ser considerada abatida se, para os pontos da superfície média, verificar-se a condição expressa pela Equação , que indica curvaturas pequenas.

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 \ll 1, \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2 \ll 1$$

A formulação completa para as cascas delgadas em geral, bem como as considerações que fundamentam a hipótese de abatimento podem ser vistas em Novozhilov (1964).

### 2.1 Equacionamento básico

Considere-se que a casca possui superfície média quadrática, dada por:

$$x_3 = -\frac{1}{2}(\mathbf{K}_{11}x_1^2 + \mathbf{K}_{22}x_2^2)$$

O equacionamento de equilíbrio da casca é escrito a seguir,

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} - \mathbf{K}_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + q_3 &= 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

sendo  $N_{\alpha\beta}$ ,  $Q_\alpha$ ,  $M_{\alpha\beta}$  as resultantes dos esforços normal, cortante e fletor respectivamente, enquanto as cargas de volume são representadas por  $q_\alpha$ . Visando apresentar de forma mais concisa a formulação, tomam-se  $u_\alpha$  e  $w$  como sendo os deslocamentos nas direções 1, 2 e 3, respectivamente.

As componentes de deformação são expressas em função dos deslocamentos da superfície média, como segue:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + 2\mathbf{K}_{\alpha\beta} w]$$

Considerando-se a teoria de Kirchhoff-Love as resultantes de esforços em termos de deslocamentos, escritas para o estado plano de tensão, valem

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \frac{1-\nu}{2} \mathbf{B} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \mathbf{B} \left[ (1-\nu) \mathbf{K}_{\alpha\beta} + \nu \mathbf{K}_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w \\ Q_\alpha &= -\mathbf{D}(w_{,\gamma\beta}) \\ M_{\alpha\beta} &= \frac{1-\nu}{2} \mathbf{D} \left( w_{,\alpha\beta} + w_{,\beta\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \end{aligned}$$

com a rigidez de membrana  $\mathbf{B}$  definida considerando a espessura  $t$  da casca:

$$\mathbf{B} = \frac{Et}{(1-\nu^2)}$$

Derivando-se a Equação em relação à  $\beta$  e substituindo na primeira equação de equilíbrio, obtém-se

$$\frac{1-\nu}{2} \mathbf{B} \left( u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\beta,\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) + \overline{q}_\alpha^m = 0$$

Verifica-se que a primeira parcela, a menos de uma força de volume  $q_\alpha$ , corresponde ao equilíbrio do problema isolado de membrana. Define-se ainda um termo de forças equivalentes:

$$\overline{q}_\alpha^m = q_\alpha + \mathbf{B} \left[ (1-\nu) \mathbf{K}_{\alpha\beta} + \nu \mathbf{K}_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w_{,\beta}$$

Deriva-se a Equação em relação à  $\alpha$ ,

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - Q_{\alpha,\alpha} = 0$$

a fim de incorporar o valor de  $Q_{\alpha,\alpha}$  dado na Equação (7), resultando:

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + q_3 = 0$$

Substituindo-se as expressões das resultantes em termos de deslocamentos, pode-se reescrever a expressão acima, como segue:

$$\frac{1-\nu}{2} D \left( w_{,\alpha\alpha\beta\beta} + w_{,\beta\alpha\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) + \bar{q}_3^f = 0$$

As forças equivalentes são dadas, para o caso de flexão, por:

$$\bar{q}_3^f = q_3 - K_{\alpha\beta} B \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \nu u_{,\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + [(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta}] w \right\}$$

Pode-se verificar que os termos de forças equivalentes promovem o acoplamento dos problemas de membrana e flexão, os quais definem o comportamento da casca.

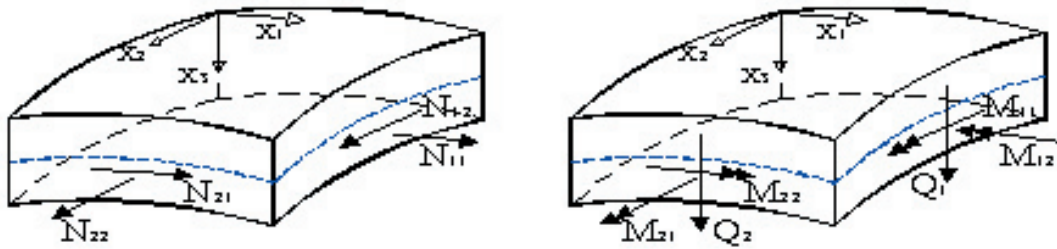


Figura 2: Esforços de membrana e flexão atuantes na casca

## 2.2 Formulação integral acoplada

Para o problema isolado do estado plano de tensão, a equação integral de deslocamento para pontos do contorno é escrita da forma:

$$C_{\alpha\beta} u_{\beta}(S) = \int_{\Gamma} P_{\beta}(Q) u_{\alpha\beta}^*(S, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta}^*(S, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma - \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S, q) q_{\alpha}(q) d\Omega$$

sendo  $u_{\alpha\beta}^*(S, Q)$  e  $P_{\alpha\beta}^*(S, Q)$  as soluções em deslocamentos e em forças de superfície no contorno do problema no estado fundamental. Estas soluções fundamentais são definidas por:

$$u_{ik}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[ -(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ik} + r_i r_k \right]$$

$$P_{ik}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^{\alpha}} \left\{ (1-2\nu) \delta_{ij} + \beta r_i r_j \right\} r_{,n} - (1-2\nu) (r_i \eta_j - r_j \eta_i)$$

Para a equação do regime de membrana, deve-se observar que a tensão  $\sigma_{\alpha\beta}$ , representada na Equação , a menos da multiplicação da espessura da casca, apresenta-se em dois termos: um primeiro que corresponde ao comportamento puramente de membrana, e um segundo associado à correção de rigidez imposta pelo acoplamento com o regime de flexão, como segue:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} B \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + B \left[ (1-\nu) K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w$$

$$= N_{\alpha\beta}^m + N_{\alpha\beta}^b$$

Aplicando-se o teorema da reciprocidade de Betti à Equação , que representa o equilíbrio de membrana da casca, obtém-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{\beta\gamma}^m(q) \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^*(s, q) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{\beta\gamma}^b(q) \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon_{\beta\gamma}(q) \sigma_{\alpha\beta\gamma}^*(s, q) d\Omega$$

Após o desenvolvimento da expressão acima, a equação integral válida em pontos do contorno resulta da forma

$$C_{\alpha\beta} u_{\beta}(S) = \int_{\Gamma} P_{\beta}(Q) u_{\alpha\beta}^*(S, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta}^*(S, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma -$$

$$B \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta}^*(S, q) \left[ (1-\nu) k_{\beta\gamma} + \nu k_{\phi\phi} \delta_{\beta\gamma} \right] w \eta_{\gamma}(q) d\Gamma +$$

$$B \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S, q) \left[ (1-\nu) k_{\beta\gamma} + \nu k_{\phi\phi} \delta_{\beta\gamma} \right] w_{,\gamma}(q) d\Omega + \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S, q) q_{\alpha}(q) d\Omega$$

na qual se percebe sua relação com a equação do problema isolado.

Já os deslocamentos num ponto de contorno de uma placa delgada são dados, em forma integral, como segue:

$$C(S)w(S) = \int_{\Gamma} \left( -M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_c} R_c^*(S, Q) w(Q)$$

$$- \int_{\Gamma} \left( -M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q) w^*(S, q) d\Omega$$

na qual as soluções fundamentais são dadas pelas expressões:

$$w^*(S, Q) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left( \ln(r) - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} = \frac{r \ln(r)}{4\pi D} r_{,i} \eta_i$$

$$M_n^*(S, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ (1+\nu) \ln(r) + (1-\nu) (r_{,i} \eta_i)^2 + \nu \right\}$$

$$M_{ns}^*(S, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left[ (1-\nu) (r_{,i} \eta_i) (r_{,k} s_k) \right]$$

$$V_n^*(S, Q) = \frac{r_{,i} \eta_{,i}}{4\pi r} \left[ 2(1-\nu) (r_{,k} s_k)^2 - 3 + \nu \right]$$

A reação de canto  $R_c$  necessária à manutenção do equilíbrio na teoria de Kirchhoff, é definida como a diferença entre os momentos volventes na vizinhança do canto  $c$  :

$$R_c^* = \left[ M_{ns}^{*p}(s, Q) - M_{ns}^{*a}(s, Q) \right] \Big|_c$$

Reescrevendo-se a Equação , introduzindo-se o termo de acoplamento, obtém-se:

$$C(S)w(S) = \int_{\Gamma} \left( -M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) \\ - \int_{\Gamma} \left( -M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{q}_3^f(q) w^*(S, q) d\Omega$$

A substituição de  $\bar{q}_3^f$  na Equação leva ao resultado a seguir.

$$C(S)w(S) = \int_{\Gamma} \left( -M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) \\ - \int_{\Gamma} \left( -M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q) w^*(S, q) d\Omega \\ - \int_{\Omega} K_{\alpha\beta}(q) N_{\alpha\beta}(q) w^*(S, q) d\Omega$$

A equação integral dos esforços de membrana  $N_{\alpha\epsilon}$  ou das tensões  $\sigma_{\alpha\epsilon}$  pode ser obtida com a substituição da Equação , adaptada para pontos internos, na Lei de Hooke, como segue:

$$\sigma_{\alpha\epsilon}(s) = - \int_{\Gamma} S_{\alpha\beta\epsilon}(s, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\epsilon}(s, Q) P_{\beta}(Q) d\Gamma + \\ \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\epsilon}(s, q) q_{\beta}(q) d\Omega - B \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\epsilon}(s, q) \left[ (1-\nu) k_{\beta\gamma,\gamma} + \nu k_{\phi\phi,\gamma} \delta_{\beta\gamma} \right] w_{,\gamma}(q) d\Omega + \\ B \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\epsilon}(s, q) \left[ (1-\nu) k_{\beta\gamma,\gamma} + \nu k_{\phi\phi,\gamma} \delta_{\beta\gamma} \right] w_{,\gamma}(q) d\Omega$$

É válido afirmar que os esforços  $N_{\alpha\epsilon}$  são iguais às tensões ao nível da superfície média multiplicadas pela espessura da casca.

$$N_{\alpha\epsilon}(s) = t \sigma_{\alpha\epsilon}(s)$$

É ainda de interesse obter a representação integral dos deslocamentos de flexão para pontos internos.

$$w(s) = \int_{\Gamma} \left( -M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q) w^*(s, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(s, Q) w(Q) \\ - \int_{\Gamma} \left( -M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q) w^*(s, q) d\Omega \\ - \int_{\Omega} K_{\alpha\beta}(q) N_{\alpha\beta}(q) w^*(s, q) d\Omega$$

As Equações , e compõem um sistema de equações determinado que permite a obtenção dos valores de interesse. Apresentam-se a seguir as expressões algébricas das equações supracitadas, na ordem em que foram definidas anteriormente. Vale destacar que a somatória  $K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}$  é representada pela variável  $\bar{N}_m$ .

$$[H_m]_{2n,2n} \{U_m\}_{2n,1} = [G_m]_{2n,2n} \{P_m\}_{2n,1} - [S_m]_{2n,2n} \{U_b\}_{2n,1} + [R_m]_{2n,2i} \{W_f\}_{2i,1} + \{F_m\}_{2n,1}$$

$$[H_b]_{2n,2n} \{U_b\}_{2n,1} = [G_b]_{2n,2n} \{P_b\}_{2n,1} + [I_b]_{2n,i} \{\bar{N}_m\}_{i,1} + \{F_b\}_{2n,1}$$

$$\{\bar{N}_m\}_{i,1} = -[H'_m]_{1,2n} \{U_m\}_{2n,1} + [G'_m]_{1,2n} \{P_m\}_{2n,1} - [S'_m]_{1,2n} \{U_b\}_{2n,1} + [Q_m]_{1,i} \{W_b\}_{i,1} + \{F'_m\}_{i,1}$$

$$\{W_b\}_{i,1} = -[H'_b]_{1,2n} \{U_b\}_{2n,1} + [G'_b]_{1,2n} \{P_b\}_{2n,1} + [I'_b]_{1,i} \{\bar{N}_m\}_{i,1} + \{F'_b\}_{i,1}$$

A representação matricial do sistema é dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} H_m & -R_m & S_m & 0 \\ 0 & 0 & H_b & -J_b \\ H'_m & -Q_m & S'_m & I \\ 0 & I & H'_b & -J'_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_b \\ U_b \\ \bar{N}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_m & 0 \\ 0 & G_b \\ G'_m & 0 \\ 0 & G'_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_m \\ P_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_m \\ F_b \\ F'_m \\ F'_b \end{Bmatrix}$$

sendo  $n$  o número de pontos no contorno e  $i$  o número de pontos no interior do domínio, os quais, na metodologia adotada, constituem os nós de células.

### 3 Tratamento das integrais de domínio

As integrais sobre o domínio presentes na formulação apresentada podem ser subdivididas em duas classes básicas. Na primeira, o núcleo da integral, que consiste em uma solução fundamental ou suas derivadas, multiplica um termo de valor conhecido sobre o domínio (Equação ), como é o caso das integrais de forças de corpo. Outra situação é aquela em que o termo multiplicado é incógnita do sistema, Equação .

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} \, d\Omega$$

$$\int_{\Omega} X^* T \, d\Omega$$

O procedimento a seguir é utilizado no cálculo de integrais do tipo apresentado na Equação . O objetivo é transferir a integral do domínio para o contorno, de forma que esta possa ser avaliada de forma mais simples.

Inicialmente, admite-se a existência de uma primitiva da solução fundamental:

$$\nabla^2 L = X^*$$

A integral pode então ser reescrita na forma:

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 L \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} \, d\Omega$$

Fazendo-se uma integração por partes, têm-se:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial y} \eta_y \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \, d\Omega$$

Uma segunda integração por partes leva a

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial y} \eta_y \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \eta_y \right) L \, d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) L \, d\Omega$$

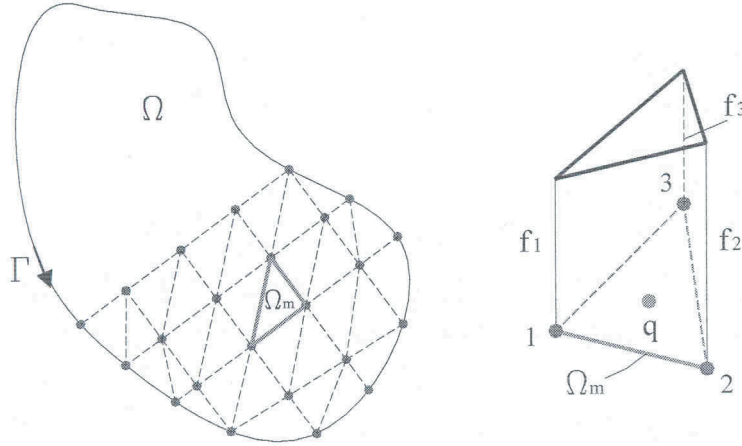
Por fim, a integral original no domínio resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 L \cdot \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial L}{\partial n} \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \right) L \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla^2 \bar{T} \cdot L \, d\Omega$$

Vale destacar que podem-se obter sucessivas primitivas, a fim de anular a integral de domínio que resta no último termo do desenvolvimento. Obtendo uma primeira primitiva, e ao fim de duas integrações, como mostrado acima, é possível tratar integrais cujo termo  $\bar{T}$  possua distribuição constante ou linear.

Podem-se utilizar diversas metodologias para o tratamento de termos de domínio como a Equação . Adota-se aqui um procedimento de cálculo semi-analítico dessas integrais, a partir da definição da variável de interesse em regiões discretas do domínio.

Considere uma porção do domínio  $\Omega$ , discretizada em células  $\Omega_m$  (Figura 3).



**Figura 3:** Divisão do domínio em células; exemplo de aproximação linear

Aproximando-se o valor de  $f(q)$  em cada célula por uma função  $\phi_1(q)$ , tem-se:

$$f_m(q) = \phi_1(q)f_1^m$$

Desta forma, uma integral que contém o termo em  $f(q)$  pode ser escrita como um somatório das integrais de cada célula, por exemplo:

$$\int_{\Omega} u^*(S, q)f(q)d\Omega = \sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_m} u^*(S, q)\phi_1(q)d\Omega_m f_1^m$$

A integração de um termo de domínio sobre as células resulta numa matriz de coeficientes, que representa a influência dos valores  $f_1$ . Substituindo-se  $f_1$  obtém-se as influências dos deslocamentos e suas derivadas.

No presente trabalho, utilizam-se células planas triangulares, e aproximação linear para as variáveis.

A função de forma linear é dada por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2A_c}(\alpha_0 + \varphi_0 x + \gamma_0 y)$$

sendo  $A_c$  a área da célula, e os termos  $\alpha_0$ ,  $\varphi_0$  e  $\gamma_0$  definidos por notação cíclica, com  $i, j, k = 1 \dots 3$ , como segue:

$$\alpha_0 = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\varphi_0 = y_j - y_k$$

$$\gamma_0 = x_k - x_j$$

O procedimento semi-analítico é brevemente descrito a seguir, de forma genérica. Inicialmente, admita-se uma integral de domínio, que possua uma solução fundamental qualquer  $u$  em seu núcleo, multiplicada por uma densidade incógnita  $f$ . Escrevendo-a como um somatório de integrais sobre células, têm-se:



$$\int_{\Omega} u^* f \, d\Omega = \sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_m} u^* \phi_1 \, d\Omega_m \, f_1^m$$

escreve-se a expressão em coordenadas polares, obtendo

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_m} u^* \phi_1 \, d\Omega_m \, f_1^m = \sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\theta} \int_r u^* \phi_1 \, r \, dr \, d\theta \, f_1^m$$

com integração analítica na variável  $r$ , chega-se à equação abaixo.

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\theta} \int_r u^* \phi_1 \, r \, dr \, d\theta \, f_1^m = \sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\theta} \Psi \, d\theta \, f_1^m$$

na qual  $\Psi$  contém as derivadas do núcleo da integral em relação a  $r$ . Na formulação aqui apresentada alguns núcleos integrais contém, além de uma solução fundamental, expressões de valor conhecido relacionadas à geometria e material da casca. A presença de tais expressões não inviabiliza de nenhum modo a aplicação do procedimento descrito acima, de forma que  $\Psi$  ainda pode ser escrito em função da coordenada  $r$ .

Uma expressão equivalente, representada sobre o contorno  $\Gamma_m$  de uma célula é,

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Gamma_m} \Psi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_m \right) f_1^m$$

que, escrita em função das coordenadas homogêneas do contorno da célula, torna-se:

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Gamma_m} |J_p| \Psi \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\xi_m \, f_1^m$$

esta expressão é integrada numericamente, por quadratura de Gauss.

## 4 Aplicações

A metodologia aqui apresentada foi implementada em linguagem MATLAB®, dando origem ao programa SSPLBE – Shallow Shell Problem with Linear Boundary Element. Inicialmente, apresenta-se um exemplo de placa, a fim de validar a implementação para o problema desacoplado de flexão. Problemas envolvendo cascas vêm a seguir.

### 4.1 Placa apoiada em dois lados ortogonais e engastada nos outros dois

Trata-se de uma placa quadrada, com 2 m de lado e 6 cm de espessura, sob um carregamento de 400 N/m<sup>2</sup>. Admita-se módulo de elasticidade de 2,05 x 10<sup>11</sup> N/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson nulo. O problema é analisado em Bares (1969). Utilizam-se 24 pontos de integração, e diferentes discretizações no contorno.

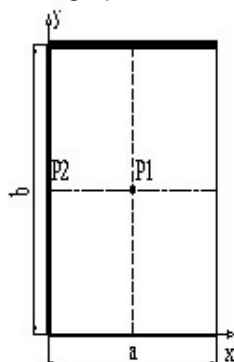


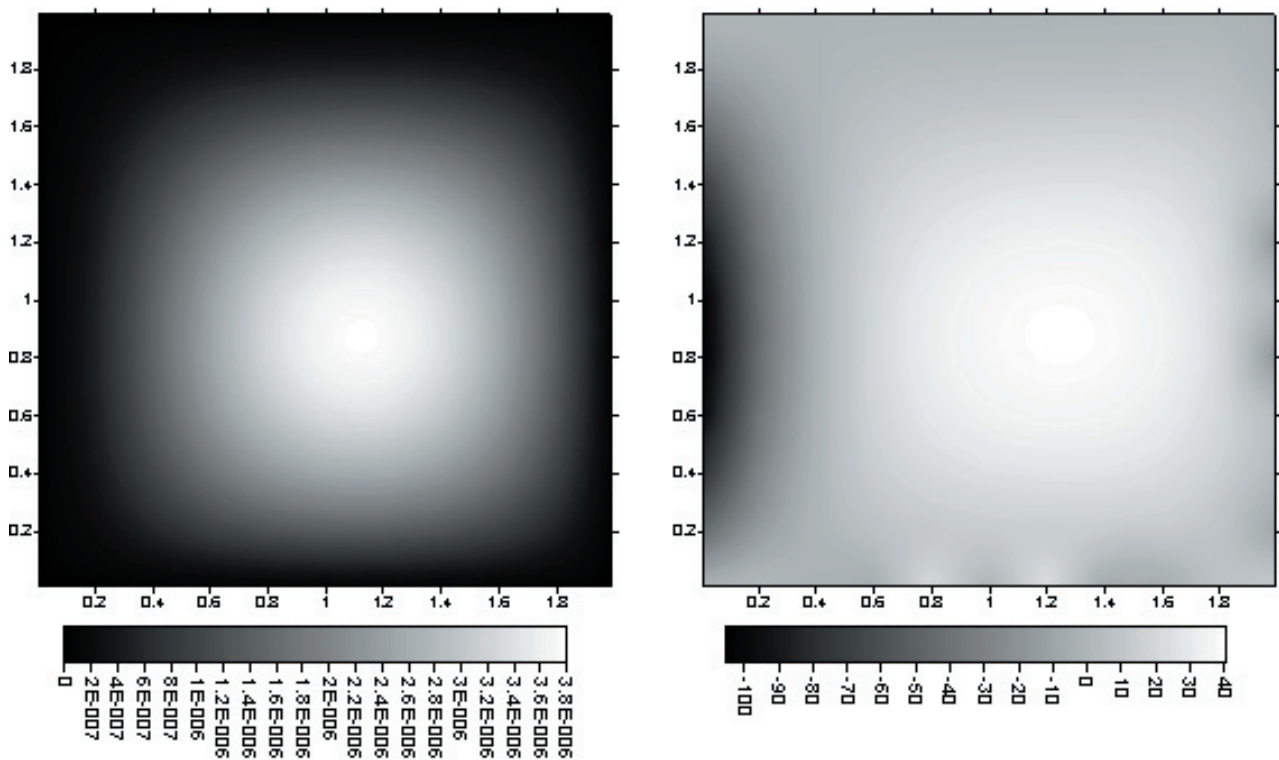
Figura 4: Placa apoiada/engastada com carga uniforme

**A Tabela 1:** Apresenta os resultados obtidos nos pontos destacados, confrontados com os valores de referência.

Método	W P1	M <sub>xx</sub> P1	M <sub>yy</sub> P1	M <sub>n</sub> P2	
Bares (1969)	3,642 x 10 <sup>-6</sup>	37,44	37,44	-108,32	
Presente Estudo	16 elem.	3,654 x 10 <sup>-6</sup>	37,47	37,47	-115,22
	32 elem.	3,649 x 10 <sup>-6</sup>	37,46	37,46	-109,74
	64 elem.	3,649 x 10 <sup>-6</sup>	37,46	37,46	-108,72

**Tabela 1:** Valores de deflexão e momentos nos pontos especificados (N,m)

Nas Figuras 5 e 6, apresentam-se alguns diagramas traçados com resultados do programa, representando as distribuições dos campos de deslocamento transversal e momentos sobre a superfície média da placa.



**Figura 5:** Deflexão (m); Momento M<sub>xx</sub> (N,m)

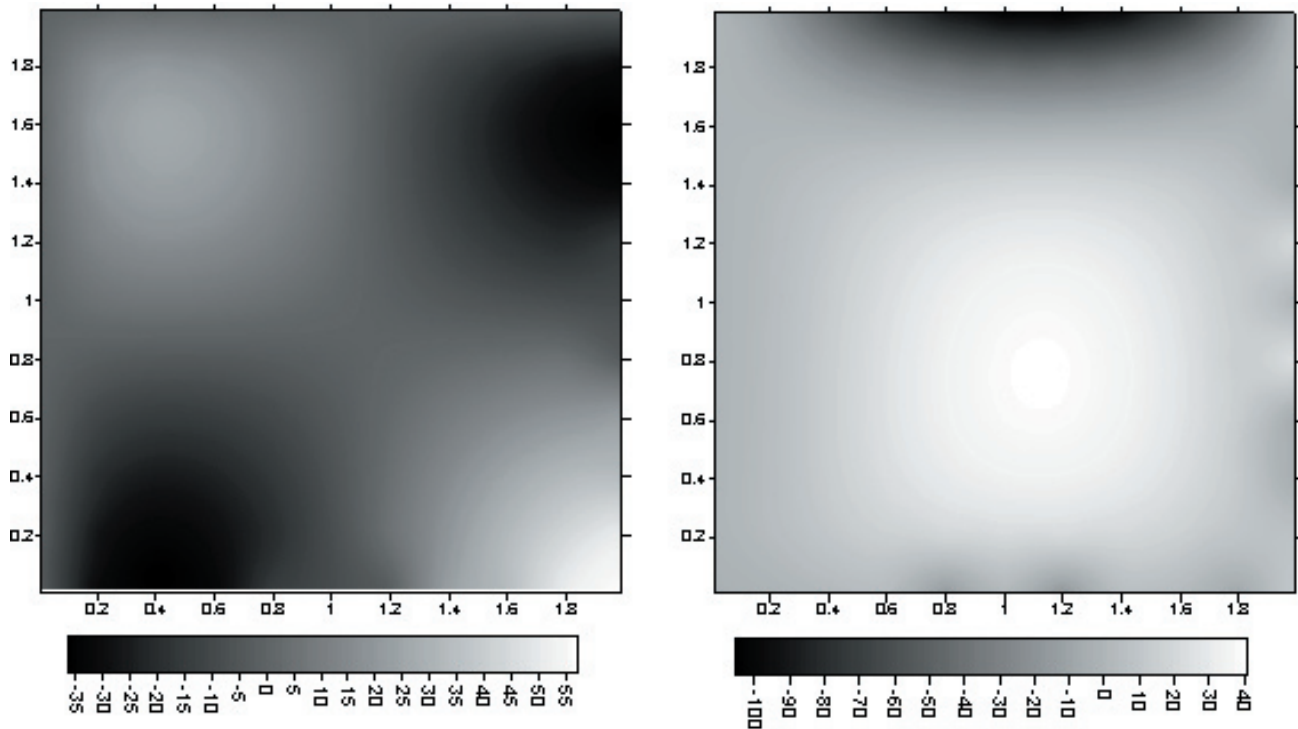


Figura 6: Momento  $M_{xy}$  (N,m); Momento  $M_{yy}$  (N,m)

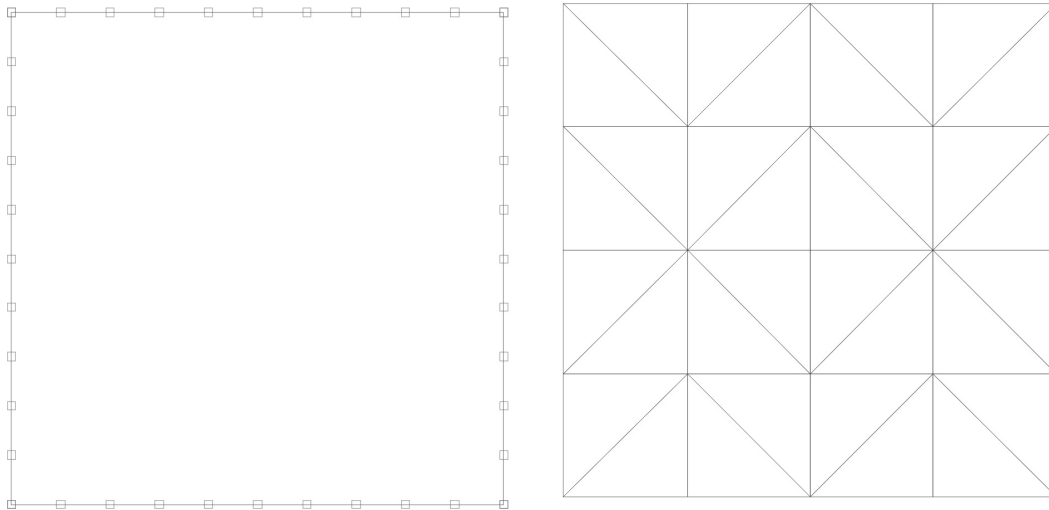
#### 4.2 Casca cilíndrica de base quadrada, engastada e livre

Admite-se uma casca de curvatura cilíndrica, com raio de 100 m, e base quadrada de dimensões unitárias (Figura 7). O carregamento transversal vale  $q_3 = 0,006853 \text{ N/m}^2$ , o módulo de elasticidade longitudinal é de  $1000 \text{ N/m}^2$  e o coeficiente de Poisson é igual a 0,3. A espessura da casca é  $h = 0,1 \text{ m}$ .



Figura 7: Casca cilíndrica, engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas

Na análise com uso do programa desenvolvido, adotam-se 40 elementos de contorno, e 32 células sobre o domínio, como ilustrado na Figura 8. Os resultados são validados por um pacote comercial, baseado no método dos elementos finitos. Para tanto, utilizam-se 400 elementos do tipo quadrilateral isoparamétrico com aproximação quadrática, o qual é bastante indicado para o tipo de problema em análise, segundo instruções do programa.

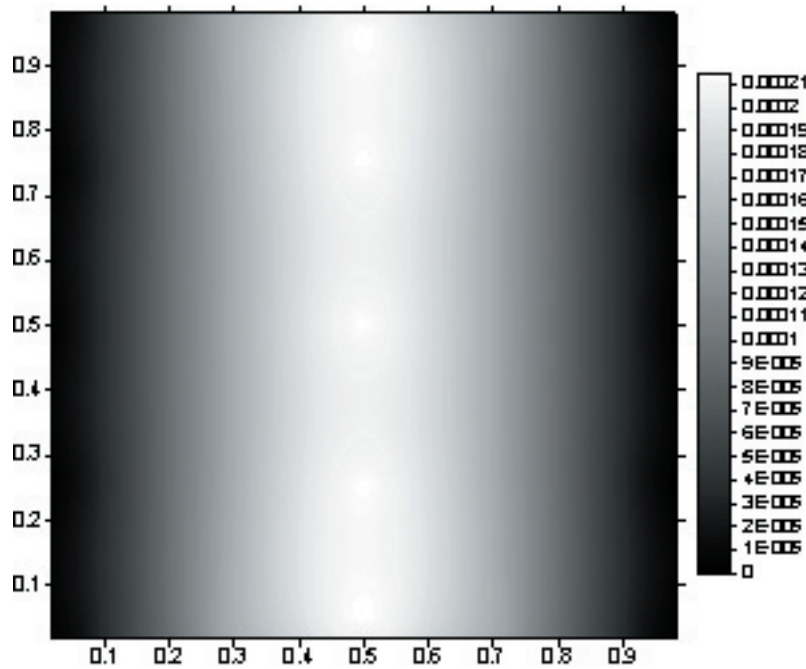


**Figura 8:** Discretizações utilizadas no contorno e no domínio

Alguns valores obtidos com a presente proposta são confrontados com os resultados de referência, como mostra a Tabela 2. O diagrama de deslocamento transversal é apresentado na Figura 9.

**Tabela 2:** Deflexão no ponto central e forças de contorno (N, m)

Método	$W_0$	$N_{\alpha} P2$	$N_{\alpha} P1$	$Q_{\alpha} P1$	$M_{\alpha} P1$
Refer. MEF	2,30E-04	2,70E-05	1,20E-04	3,12E-04	-4,67E-04
Presente Estudo	2,15E-04	2,77E-05	1,25E-04	3,35E-04	-4,70E-04



**Figura 9:** Deslocamento transversal obtido com a proposta apresentada

Verifica-se uma boa conformidade entre os valores propostos e os resultados do método dos elementos finitos.

### 4.3 Casca esférica de base circular, engastada

Analisa-se neste exemplo uma casca em forma de cunha esférica, com 10 m de diâmetro, espessura de 0,01 m e raio de curvatura  $R = 100$  m. As propriedades mecânicas e de carregamento valem:  $E/q_3 = 2,1 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup> e  $\nu = 0,3$ . Considera-se a borda perfeitamente engastada, sendo as condições de contorno  $u_i = 0$ ,  $w = 0$ ,  $w_{,i} = 0$ .

A validação do exemplo é feita com base em dois trabalhos da literatura. Em Dirgantara & Aliabadi (1999), apresenta-se uma análise pelo método dos elementos de contorno, além de resultados obtidos com uso de um programa comercial (SAP90), baseado em elementos finitos. Na formulação via MEC proposta no trabalho supracitado, a flexão é tratada pela Teoria de Reissner, e as integrais de domínio são computadas por aproximação sobre células quadrilaterais com geometria quadrática e aproximação constante para as variáveis. Ainda, utilizam-se elementos de contorno quadráticos isoparamétricos. Neste trabalho referenciado, utilizam-se 16 elementos de contorno e 81 células. A malha de elementos finitos utilizada possui 540 elementos. No segundo trabalho, Wen *et al.* (2000) utilizam o MEC para a análise do problema, com elementos quadráticos isoparamétricos na aproximação do contorno. As integrais de domínio são transformadas para o contorno através do método da reciprocidade dual (Nardini & Brebbia). Utiliza-se a Teoria de Reissner. O contorno é discretizado em 16 elementos, e 25 pontos são utilizados no mapeamento do domínio.

No presente trabalho, analisa-se apenas um quarto da estrutura, em razão da simetria. Utilizam-se 36 elementos de contorno e 82 células, como ilustrado na Figura 10. A Tabela 3 lista alguns resultados, tais como a deflexão no ponto central, e as forças no contorno.

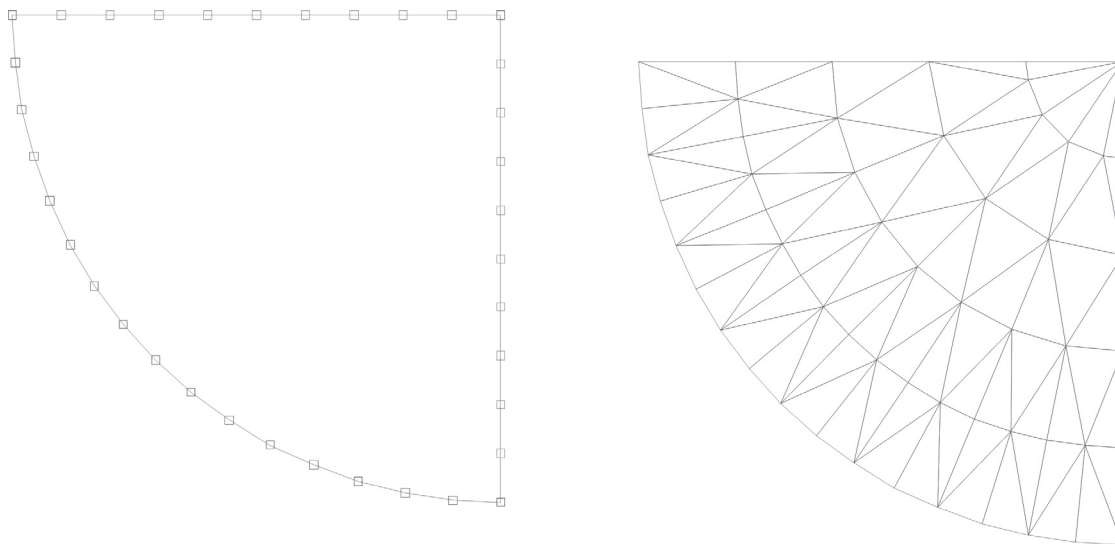


Figura 10: Discretizações utilizadas no contorno e no domínio

Tabela 3: Deflexão e forças no contorno da casca esférica (N,m)

Resultado	Presente	Refer. 1 MEC	Refer. 2 MEC	Refer. MEF
$W_0$	0,205	0,209	0,211	0,210
$N_n$	22,812	22,300	22,729	22,879
$Q_n$	1,667	1,386	1,429	-
$M_n$	1,463	1,499	1,507	1,492

Verifica-se uma razoável concordância dos valores aqui obtidos com os resultados de referência. Deve-se ressaltar que na modelagem de apenas um quarto da estrutura existe o inconveniente do canto livre, que pode levar a perturbações na solução em sua vizinhança.

## 5 Conclusão

Apresentou-se um modelo numérico para análise de cascas abatidas, o qual apresentou desempenho satisfatório numa validação feita com base em outros trabalhos e em resultados de programas comerciais consagrados, baseados no método dos elementos finitos.

## 6 Agradecimentos

Agradecemos à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – pelo apoio financeiro, sem o qual esta pesquisa não poderia ter sido realizada.

## Referências

- BARES, R. *Tables pour le calcul des dalles et des parois*. Paris: Dunod, 1969. 537 p.
- DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. A new boundary element formulation for shear deformable shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, London, v. 45, n. 9, p. 1257-1275, 1999.
- DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. Non-linear fracture mechanics analysis of fuselage panels using BEM. *Advances in fracture and damage mechanics: key engineering materials*, London, v. 251, n. 2, p. 115-121, 2003.
- FORBES, D. J.; ROBINSON, A. R. *Numerical analysis of elastic plates and shallow shells by an integral equation method*. Illinois: Illinois University Urbana. Dept of Civil Engineering, 1969. 245 p. (Structural Research Series Report, n. 345)
- LEI, X. Y.; HUANG, M. K.; WANG, X. Analysis of the explicit fundamental solution of a shallow spherical shell involving shear deformation. *Applied Mathematical Modelling*, London, v. 19, n. 4, p. 194-200, 1995.
- LIN, J.; LONG, S. Geometrically nonlinear analysis of the shallow shell by the displacement-based boundary element formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, London, v. 18, n. 1, p. 63-70, 1996.
- LU, P., HUANG, M. Boundary element analysis of shallow shells involving shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, London, v. 29, n. 10, p. 1273-1282, 1992.
- LU, P., HUANG, M. Computation of the fundamental solution for shallow shells involving shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, London, v. 28, n. 5, p. 631-645, 1991.
- MATSUI, T., MATSUOKA, O. The fundamental solution in the theory of shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, London, v. 14, n. 12, p. 971- 986, 1978.
- NEWTON, D. A., TOTTENHAM, H. Boundary value problems in thin shallow shells of arbitrary plan form. *Journal of Engineering Mathematics*, New York, v. 2, n. 3, p. 211- 223, 1968.
- NOVOZHILOV, V. V. *The theory of thin shells*. Groningen: Noordhoff, 1964. 438 p.
- PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E. Free and forced vibration of shallow shells by boundary and interior elements. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Boston, v. 92, n. 1, p. 55-74, 1991.
- WEN, P. H., ALIABADI, M. H. and YOUNG, A. Boundary element analysis of reinforced shear deformable shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, London, v. 54, n. 6, p. 789-808, 2002.
- WEN, P. H., ALIABADI, M. H. and YOUNG, A. Plane stress and plate bending coupling in BEM analysis of shallow shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, London, v. 48, n. 8, p. 1107-1125, 2000.
- WEN, P. H., ALIABADI, M. H. and YOUNG, A. Application of dual reciprocity method to plates and shells. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, New York, v. 24, n. 7-8, p. 583-590, 2000.
- ZHANG, J. D., ATLURI, S. N. A boundary-interior element method for quasi static and transient response analysis of shallow shells. *Computers and Structures*, New Cork, v. 24, n. 2, p. 213-223, 1986.

**Eduardo Toledo de Lima Junior**

Doutorando, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo (SET - EESC/USP); Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas (UFAL), 1999-2003; Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo (EESC/USP), 2004-2006; Doutorado em Engenharia Civil (Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo (EESC/USP), em convênio com o *Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) - E.N.S. de Cachan-CNRS - Université Paris 6*, 2006- [ ].

**Wilson Sergio Venturini**

Professor Titular, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo (SET - EESC/USP); Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo (EESC/USP), 1967-1972; Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo (EESC/USP), 1973-1977; Doutorado em Engenharia Civil (Estruturas), *University of Southampton*, Inglaterra, 1979- 1982; Livre-Docência em engenharia Civil (Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo (EESC/USP), 1988; Pós-Doutorado em Engenharia Civil, *Instituto Politecnico di Milano*, Itália, 1992- 1993; Pós-Doutorado em Engenharia Civil, *Ecole Normale Supérieure de Paris*, França, 1996- 1996.