# Coloração total em grafos *K*-caminho

**Abel Rodolfo Garcia Lozano**
arglozano@terra.com.br
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Universidade do Grande Rio

**Angelo Santos Siqueira**
angelosiqueira@uol.com.br
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Universidade do Grande Rio

**Resumo**

A coloração é uma sub-área que teve seu início com a conjectura das Quatro Cores, apresentada por Francis Guthrie a Augustus De Morgan, por volta de 1850 e provada por Appel e Haken, em 1977. As noções de coloração total e de número cromático total de um grafo foram introduzidas em 1965 simultaneamente por Behzad e Vizing, enquanto o conceito de grafo *k*-caminho surgiu no início da década de 70, através de Beineke e Pipert. A união destes conceitos, junto com a coloração de vértices com folga de ordem *k*, abordada pela primeira vez em 2009 por Lozano et all, formam o eixo principal deste artigo. Desta forma, este trabalho apoiado por dois teoremas e um corolário, mostra que todo grafo *k*-caminho satisfaz a conjectura de Vizing-Behzad para coloração total.

**Palavras-chave:** Coloração total. Grafos k-caminho. Coloração com folga.

**Abstract**

Coloring is a sub-area that began with the Four Color Conjecture, by Francis Guthrie to Augustus De Morgan, in 1850 and proved by Appel and Haken in 1977. The total coloring and total chromatic number of a graph notions were introduced in 1965 simultaneously by Behzad and Vizing and while the concept of *k*-path graph appeared in the early 70's, by Beineke and Pipert. The union of these concepts, together with the range vertex coloring of order *k*, first addressed in 2009 by Lozano et all, form the main axle of this paper. Thus, this work supported by two theorems and a corollary shows that every *k*-path graph satisfies the conjecture of Vizing- Behzad for total coloring.

**Keywords:** Total coloring. K-path graph. Range coloring.

## 1 Introdução

A teoria dos grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da matemática, sendo seu surgimento estabelecido como 1736, ano da solução do problema das pontes de Königsberg por Euler. Além deste, poucos trabalhos surgiram até meados do século XIX, destacando-se o de Kirchhoff que, em 1847, utilizou modelos em árvores no estudo de circuitos elétricos, e o de Cayley, que utilizou o conceito de grafo para fazer a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

A partir daí, diversos problemas e aplicações surgiram, e algumas sub-áreas foram, naturalmente, nascendo dentro da teoria dos grafos. A coloração é uma sub-área que teve seu início com a Conjectura das Quatro Cores, apresentada por Francis Guthrie a Augustus De Morgan, por volta de 1850 e provada por Appel e Haken, em 1977.

A importância deste problema reside nos desenvolvimentos teóricos trazidos pelas tentativas de resolvê-lo, as quais enriqueceram a teoria dos grafos em diversos aspectos ao longo da primeira metade do século XX. Em 1941, Brooks provou que, se $G$ é um grafo conexo e não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então $\Delta \leq \chi'$, onde $\Delta$ representa o grau máximo do grafo e $\chi'$, o número cromático de $G$, isto é, o menor número de cores que se pode utilizar para colorir os vértices de um grafo. Juntamente com a coloração de vértices, o interesse pelo estudo da coloração de arestas, bem como o estudo do índice cromático $\chi'$ de um grafo, aumentou bastante. Neste sentido, o importante Teorema de Vizing (1964), resultado obtido independentemente por Gupta em 1966, estabelece que $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$. Na verdade, Vizing provou um teorema mais geral para multigrafos, demonstrando que $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + \mu$, onde $\mu$ representa a multiplicidade do multigrafo.

Na prática, rapidamente foram encontradas diversas aplicações para a coloração de vértices e arestas, em diferentes áreas, como alocação e escalonamento de tarefas, desenho e instalação de redes elétricas, redes de interconexão, dentre outras.

As noções de coloração total e de número cromático total $\chi''$ de um grafo foram introduzidas em 1965 simultaneamente por Behzad e Vizing. Neste mesmo ano, eles conjeturaram que $\chi'' \leq \Delta + 2$. Novamente Vizing fez uma conjectura mais geral afirmando que $\chi'' \leq \Delta + \mu + 1$. Para o caso geral, essas conjecturas permanecem em aberto até hoje.

Os grafos $k$-caminho surgiram a partir do conceito de $k$-árvores, introduzido por Beineke e Pipert em 1971. Na verdade, os grafos $k$-caminho representam uma subfamília das $k$-árvores, que por sua vez, são estruturas baseadas em grafos completos.

O objetivo deste trabalho é mostrar que todo grafo $k$-caminho satisfaz a conjectura de Vizing-Behzad para coloração total.

## 2 Conceitos Básicos

Nesta seção, serão apresentadas definições básicas e terminologias da teoria de grafos utilizadas neste trabalho, e que também podem ser encontradas em Bondy e Murty (1976); Diestel (1997) e Yap (1986).

Um **grafo *G*** é uma tripla ordenada ($V(G)$, $E(G)$, $\Psi_G$), formada por um conjunto finito não vazio $V(G)$ de vértices, um conjunto $E(G)$ de arestas disjuntas de $V(G)$ e uma função de incidência $\Psi_G$ que associa a cada aresta de $E(G)$ um par não ordenado de vértices.

Deste ponto em diante, a função $\Psi_G$, será omitida e um grafo $G$ será denotado por $G(V(G), E(G))$ ou $G(V, E)$ ou mais simplesmente $G$ quando não houver necessidade de destacar o conjunto de vértices e/ou arestas. O número de vértices é representado por $|V|$ ou $n$, enquanto o número de arestas é representado por $|E|$ ou por $m$. Se $e \in E(G)$ e $u, v \in V(G)$, são tais que $\Psi_G(e) = uv$, diz-se que $e$ liga ou conecta $u$ e $v$, ou ainda, que $u$ e $v$ são os extremos ou pontos finais da aresta $e$ que também será denotada por $uv$. Neste caso, diz-se que $u$ e $v$ são adjacentes, e que a aresta $e$ é incidente aos vértices $u$ e $v$. Se duas arestas possuem um extremo comum são ditas adjacentes. Neste trabalho, a palavra grafo, tem o significado de grafos simples sem laços. Para cada vértice $v$ o número de arestas incidentes a $v$ é dito grau do vértice $v$ e denotado por $d_G(v)$, ou simplesmente por $d(v)$. O número $\min_{v \in V} d(v)$ será denotado por $\delta(G)$, ou simplesmente por $\delta$. O número $\max_{v \in V} d(v)$ será denotado por $\Delta(G)$, ou simplesmente por $\Delta$. Um grafo $G(V, E)$, tal que todos os seus vértices tenham o mesmo grau $k$ é chamado de grafo $k$-regular. Dado um grafo simples $G(V, E)$, se $G$ é $(n–1)$-regular, então é chamado de grafo completo de ordem $n$ e denotado por $K_n$. Um subgrafo $H(V', E')$ de $G(V, E)$ é dito subgrafo induzido de $G$, se $uv \in E$ implica em $uv \in E'$. Finalizando, diz-se que $v \in V$ é simplicial quando $Adj(v)$ é uma clique em $G$, isto é, o subgrafo $G[Adj(v)]$ de $G$ induzido por $Adj(v)$ é um grafo completo.

## *3 K*-árvores, *K*-caminhos e Grafos *K*-caminho

Nesta seção, serão definidos os conceitos de $k$-árvores, $k$-caminhos e grafos $k$-caminho. Na literatura, podem-se encontrar diversas definições de $k$-árvores, optou-se em trabalhar com a definição dada em Markenzon et all (2006), enquanto que para os $k$-caminhos e grafos $k$-caminho, a de Pereira (2007). É importante ressaltar que as $k$-árvores representam uma subfamília dos grafos cordais, e com isso, possuem todas as características e propriedades estudadas por Golumbic (2004); Markenzon e Vernet (2002); Markenzon e Vernet (2006).

Uma ***k*-árvore** é qualquer grafo completo com $k$ vértices ou um grafo $G = (V, E)$ que contém um vértice cujos vizinhos em $G$ induz um grafo completo com $k$ vértices e cuja remoção resulta em uma ***k*-árvore**.

Um ***k*-caminho** em um grafo $G = (V, E)$, $k > 0$, com comprimento $p > 0$ é uma sequência $\langle B_0, C_1, B_1, ..., C_p, B_p \rangle$, tal que:

i) $B_j \subset V$, $0 \leq j \leq p$, são $k$-cliques distintas de $G$;

ii) $C_i \subseteq V$, $1 \leq i \leq p$, são $(k+1)$-cliques distintas de $G$;

iii) $B_{i-1} \subset C_i$, $B_i \subset C_i$ e nenhuma outra $k$-clique $B_j$, $0 \leq j \leq p$, $j \neq i - 1$ e $j \neq i$, é um subconjunto de $C_i$, $1 \leq i \leq p$.

A Figura 1(A) mostra uma 3-árvore com nove vértices, enquanto que na Figura 1(B), obteve-se, a partir desta 3-árvore, um 3-caminho maximal representado pela sequência $\langle \{a, b, d\}; \{a, b, c, d\}; \{a, b, c\}; \{a, b, c, f\}; \{b, c, f\}; \{b, c, f, h\}; \{c, f, h\}; \{c, f, h, i\}; \{c, h, i\} \rangle$. Este 3-caminho é maximal, pois não existe outro 3-caminho que contenha mais do que quatro 4-cliques desta 3-árvore.

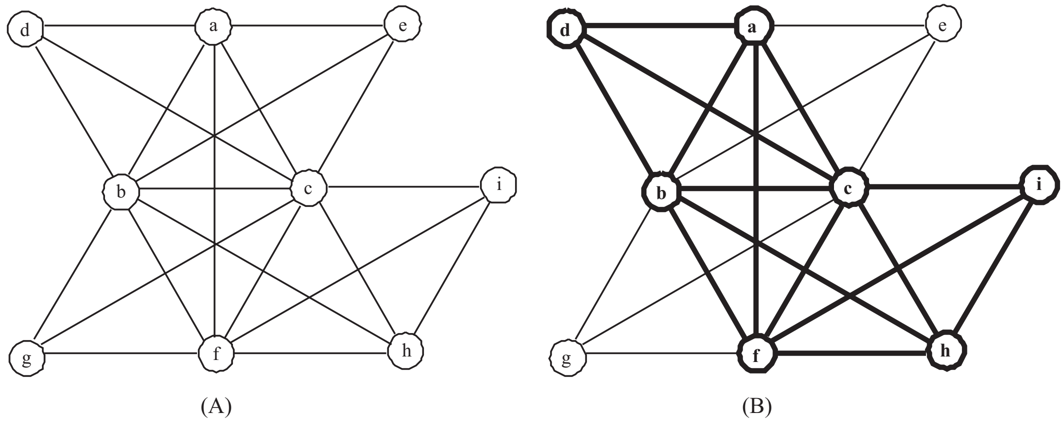


**Figura 1.** 3: árvore e 3-caminho maximal de comprimento 4.

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n$ vértices, sendo $n > k$. $G$ é um **grafo *k*-caminho** quando existe em $G$ um $k$-caminho de comprimento $n – k$.

Segue abaixo, na Figura 2, um grafo 3-caminho de comprimento 5, representado pela sequência $\langle\{a, b, c\}$; $\{a, b, c, d\}$; $\{a, c, d\}$; $\{a, c, d, e\}$; $\{c, d, e\}$; $\{c, d, e, f\}$; $\{c, e, f\}$; $\{c, e, f, g\}$; $\{e, f, g\}$; $\{e, f, g, h\}$; $\{e, g, h\}\rangle$.

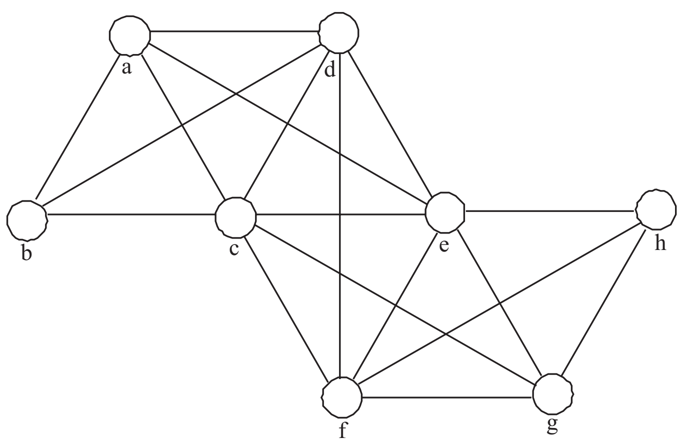


**Figura 2.** Grafo 3-caminho de comprimento 5.

Markenzon et all (2006) propõem um teorema de caracterização para os grafos $k$-caminho, onde mostram que uma $k$-árvore com $n$ vértices, sendo $n > k + 1$, é um grafo $k$-caminho se, e somente se, possuir exatamente dois vértices simpliciais. No grafo 3-caminho de comprimento 5 da Figura 2, os vértices $b$ e $h$ são os simpliciais.

## 4 Coloração Total

Nesta seção, serão apresentados os conceitos de coloração total e número cromático total, que servirão de suporte para o restante do trabalho.

Dado um grafo $G(V, E)$, uma **coloração total** de $G$ é uma aplicação do conjunto $E \cup V$ em um conjunto de cores $C = \{1, 2, ..., k\}$, $k \in$ ¥ . Uma coloração total com $k$ cores, é chamada de $k$-coloração total.

Uma coloração total própria é uma coloração tal que nenhum par de elementos incidentes ou adjacentes, tem associada a mesma cor. Uma coloração total própria com $k$ cores, é chamada de $k$-coloração total própria. Nesse texto, a expressão "coloração total" sempre será usada em referência a "coloração total própria".

Dado um grafo $G(V, E)$, o menor número de cores que permite construir uma coloração total própria de $G$, é chamado **número cromático total de *G*** e denotado por $\chi''(G)$, ou simplesmente $\chi''$, se não existir ambiguidade.

A Figura 3 ilustra uma 4-coloração total própria, com as cores $c_1$, $c_2$, $c_3$ e $c_4$. De agora em diante, para qualquer tipo de coloração, se um elemento $x$ tem associada uma cor $c$ diz-se que $x$ está colorido com a cor $c$.

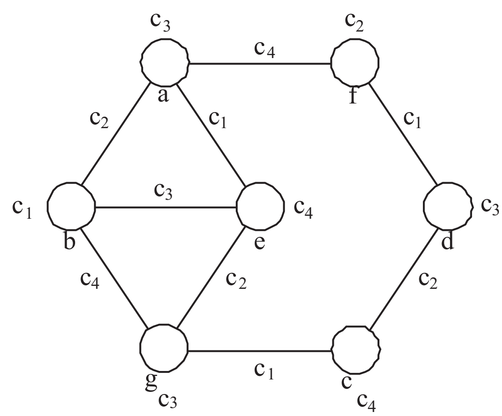


**Figura 3.** Uma coloração total.

Claramente, qualquer grafo $G$ necessita de pelo menos $\Delta(G) + 1$ cores para colorir totalmente seus elementos. Por outro lado, os matemáticos Vadim Vizing e Medhi Behzad conjeturaram, em 1965, que todo grafo simples $G$ possui uma coloração total com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores, isto é, $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ (Conjectura da Coloração Total ou de Vizing-Behzad).

## 5 Coloração de Vértices com Folga

Lozano et all (2009) introduzem, um tipo de coloração própria de vértices que chamam de coloração com folga de ordem $k$, sendo $k$ um inteiro positivo.

Considere um grafo $G = (V, E)$ e $k \in ¢_+$ . Uma coloração própria $c: V \to C$ de $G$ é denominada uma **coloração com folga de ordem *k*** de $G$ quando para todo $v \in V$ se $d(v) \leq k$ então $|c(N(v))| = d(v)$, caso contrário $|c(N(v))| \geq k$.

Assim, na coloração de vértices com folga de ordem $k$, vértices com grau menor do que a folga exigida devem ter todos os vizinhos coloridos com cores distintas e os de grau igual ou maior do que $k$, devem utilizar na vizinhança pelo menos $k$ cores. Para o caso $k = 1$, temos coloração própria usual de vértices, e $\Delta$ é cota superior para a ordem da folga.

A Figura 4 abaixo ilustra a coloração de um ciclo com 4 vértices. Em (A) tem-se uma coloração de vértices habitual, enquanto que em (B) a coloração dos vértices do ciclo é com folga 2.

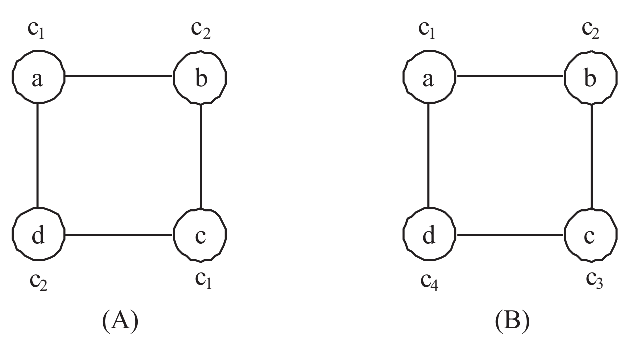


**Figura 4.** Coloração total de um ciclo com 4 vértices.

Diz-se que G é *t*-colorível com folga de ordem $k$ quando $|c(V)| = t \leq |C|$. Define-se também o **número cromático com folga de ordem *k* de *G***, denotado por $\chi_f^k(G)$, como o menor valor de $t$ para o qual existe uma coloração com folga de ordem $k$ para os vértices de $G$.

Na Figura 5(A), abaixo, a coloração própria de vértices apresentada é também uma coloração com folga de ordem 2. Desta forma, $\chi_f^2(G) = \chi(G) = 3$. Na Figura 5(B) tem-se um octaedro colorido com folga de ordem 3 com $\chi_f^3(G) = 5$ e na Figura 5(C) uma coloração com folga de ordem 4 com $\chi_f^4(G) = 6$.

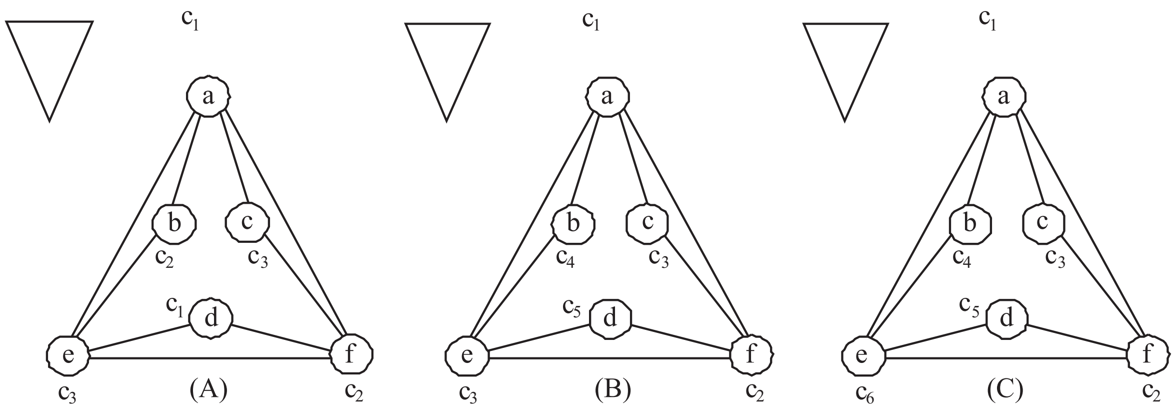


**Figura 5.** Coloração com folga de ordem 2, 3 e 4, respectivamente.

## 6 Coloração Total em Grafos *K*-caminho

Nesta seção, serão apresentados os principais resultados deste trabalho. Inicialmente, provamos que para todo grafo *k*-caminho existe uma $(\Delta + 1)$-coloração com folga $\Delta$ para os vértices de *G*. Em seguida, provamos que se existe tal coloração em *G*, então existe uma coloração total de *G* com no máximo $\Delta + 2$ cores. Finalizamos com um corolário que diz que todo grafo *k*-caminho satisfaz a conjectura de Vizing para coloração total.

**Teorema 1.** *Para todo grafo k-caminho existe uma* $(\Delta + 1)$*-coloração com folga* $\Delta$ *para os vértices de G.*

**Prova.** A prova será por indução sobre o número de vértices. Seja $G(V, E)$ um grafo *k*-caminho. Para $n = k + 1$ o grafo *k*-caminho é uma clique com $k + 1$ vértices e o teorema vale trivialmente. Caso contrário, retire um vértice $v$ simplicial de *G* e obtém-se um grafo *k*-caminho $G'(V', E')$ e por hipótese de indução existe uma $\Delta_{G'} + 1$ coloração com folga $\Delta_{G'}$, para $G'$. Recoloca-se $v$. Se $\Delta_G > \Delta_{G'}$, então basta colorir $v$ com a $(\Delta_{G'} + 2)$-ésima cor, que é menor ou igual que $\Delta_G + 1$, senão seja $X = \{x_1, ..., x_k\}$ o conjunto dos vizinhos de $v$. Por facilidade, suponha que os vértices estão enumerados segundo sua ordem de entrada, tomando como base o esquema de eliminação perfeita, na construção de $G'$. Note que $x_1$ está ligado a $k$ vértices $Y = \{y_1, ..., y_k\}$ fora da clique $X = \{x_1, ..., x_k\}$ e por definição de grafo *k*-caminho, não existe vértice $x_i$ que esteja ligado a algum vértice $x \in X \cup Y$, logo $N(X) = N(x_1)$, daí basta colorir $v$ com uma cor diferente das cores usadas no conjunto $\{x_1\} \cup N(x_1)$. Como $\Delta_G = \Delta_{G'} \geq d_{G'}(x_1) = |X| + |Y| - 1$ e por outro lado $d_G(x_1) = |X| + |Y| - 1 + |\{v\}| = |X| + |Y|$, temos que, no pior caso $|\{x_1\} \cup N(x_1)| = |X| + |Y| = \Delta_{G'}$ sobrando ainda uma cor para o vértice $v$.$\bar{s}$

A Figura 6 ilustra algumas etapas do Teorema 2. A Figura 6(A) mostra o um grafo 3-caminho *G*', sem o vértice simplicial $v$, colorido com $\Delta + 1$ cores, isto é, com 7 cores. Ao recolocarmos $v$, temos, em (B), um dos casos que é o aumento do grau do grafo *G* em relação a *G*' (grafo com torção). Neste caso pode-se colorir o vértice $v$ com a cor $c_8$. No outro caso, como pode ser visto em (C), com a inserção de $v$, o grau de *G* não aumenta (grafo sem torção), entretanto, o Teorema 2 garante que ainda é possível colorir os vértices grafo com $\Delta + 1$ cores, ou seja, 7 cores.

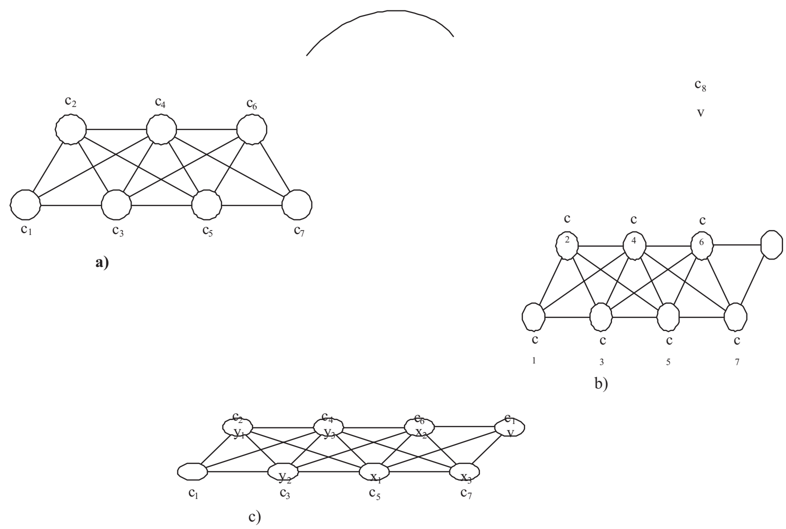

**Figura 6.** Etapas do teorema

**Teorema 2.** *Sejam G(V, E) um grafo e c:* $V \rightarrow C = \{1, 2, 3, ..., \Delta+1\}$ *uma coloração com folga* $\Delta$ *dos vértices de G. Então existe uma coloração total de G com no máximo* $\Delta + 2$ *cores.*

**Prova.** Sejam $K_{\Delta+1}(V', E')$ o grafo completo de ordem $\Delta+1$, e $c'$: $V \rightarrow C' = \{1, 2, ..., \Delta+2\}$ uma coloração total de $K_{\Delta+1}$. Para facilitar à escrita identificaremos os vértices de $K_{\Delta+1}$ com a cor associada a ele por $c$, novamente por comodidade suponhamos que as cores 1, 2, 3, ..., $\Delta+1$, foram usadas para colorir os vértices de $K_{\Delta+1}$, tomando como base, por exemplo, o processo de construção indutiva. Vamos estender a coloração $c$ às arestas de $G$ da seguinte forma:

Definimos a aplicação $f$: $V \rightarrow V'$ da seguinte forma, $f(u) = i$ onde $i$ é o vértice de $K_{\Delta+1}$, tal que $c(u) = c'(i)$. Agora para cada aresta $uv \in E$, definimos $c(uv) = c'(f(u)f(v))$. Observe que a coloração assim definida é própria, pois, se duas arestas $uv$ e $uv'$ são incidentes em $u$ então $c(v) \neq c(v')$, consequentemente $f(v) \neq f(v')$ e como $c'(f(u)f(v)) \neq c'(f(u)f(v'))$, então $c(uv) \neq c(uv')$. Por outro lado, se uma aresta $uv \in E$ é incidente no vértice $v \in V$, então $c'(f(v)) \neq c'(f(u)f(v))$, e daí $c(u) \neq c(uv)$.

A Figura 7(B) mostra a coloração total de um grafo 2-caminho, tomando como base a coloração total do $K_6$, Figura 7(A).

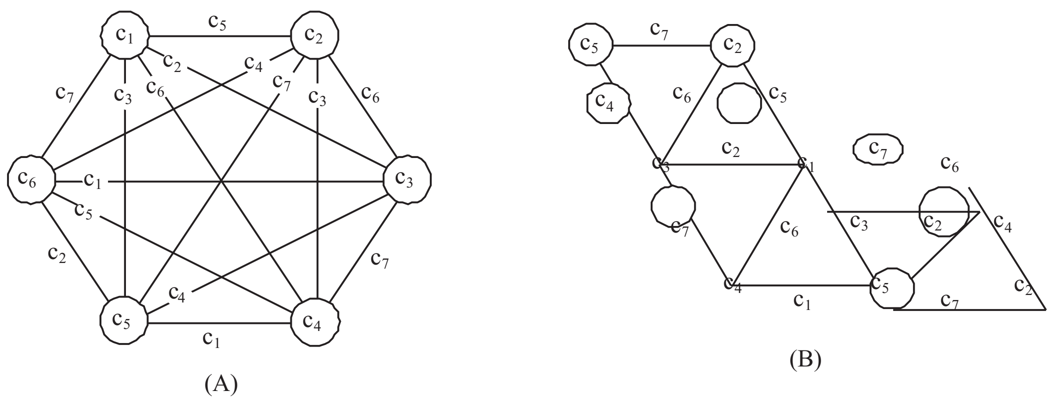

**Figura 7.** Coloração total de um grafo 2-caminho com $\Delta + 2$ cores.

Uma outra possibilidade é utilizar um quadrado latino para colorir as arestas de um grafo $G$ que possui uma $(\Delta + 1)$-coloração com folga $\Delta$ para os seus vértices. Inicialmente, colore-se o grafo 2-caminho de acordo com o Teorema 2, Figura 8(A), em seguida, constrói-se um quadrado latino de ordem $\Delta + 1$, tomando como base as cores $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$,

$c_5$ e $c_6$, como mostra a Figura 8(B). Finalizando, as arestas são coloridas, respeitando-se a construção deste quadrado, Figura 8(C).

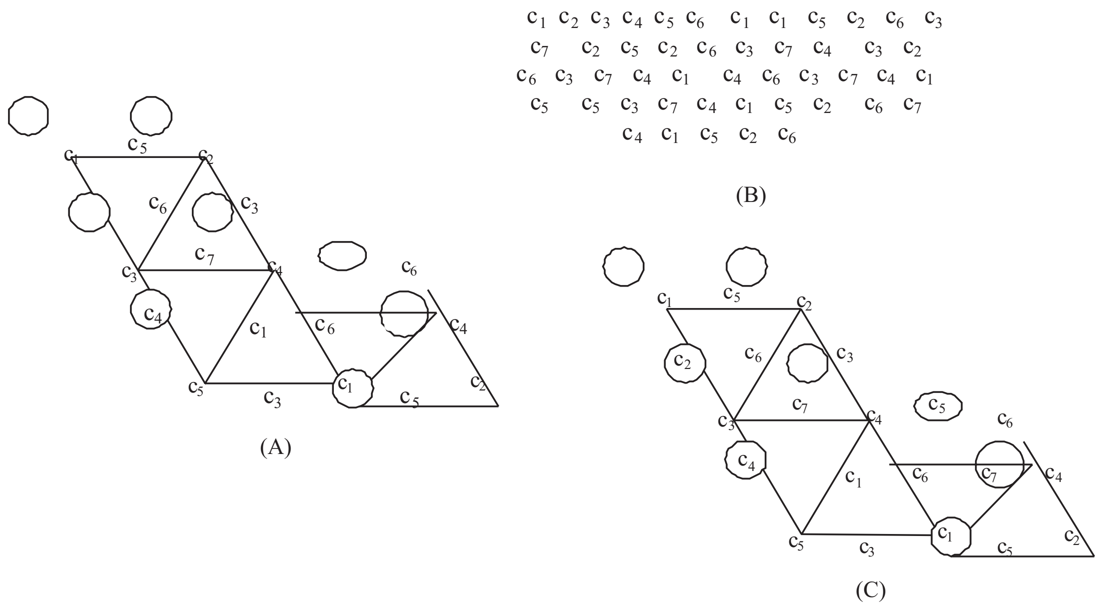

**Figura 8.** Coloração total de um grafo 2-caminho, com o auxílio de um quadrado latino.

**Corolário.** *Todo grafo k-caminho satisfaz a conjectura de Vizing para coloração total.*

**Prova.** Pelo Teorema 1, tem-se que para todo grafo *k*-caminho existe uma ($\Delta + 1$)-coloração com folga $\Delta$. Por outro lado, pelo Teorema 2, sabe-se que existe uma coloração total com no máximo $\Delta + 2$ cores, para todo grafo $G(V, E)$ que possui uma ($\Delta + 1$)-coloração com folga $\Delta$. Com isso, infere-se que para todo grafo *k*-caminho existe uma coloração total com no máximo $\Delta + 2$ cores, o que satisfaz a conjectura de Vizing.

A Figura 9(A) abaixo mostra a coloração total de um grafo 2-caminho com torção usando $\Delta + 2$ cores, enquanto que em (B) tem-se a coloração total de um grafo 3-caminho sem torção com $\Delta + 1$ cores. Não existem evidências de que a torção do grafo interfira na coloração.

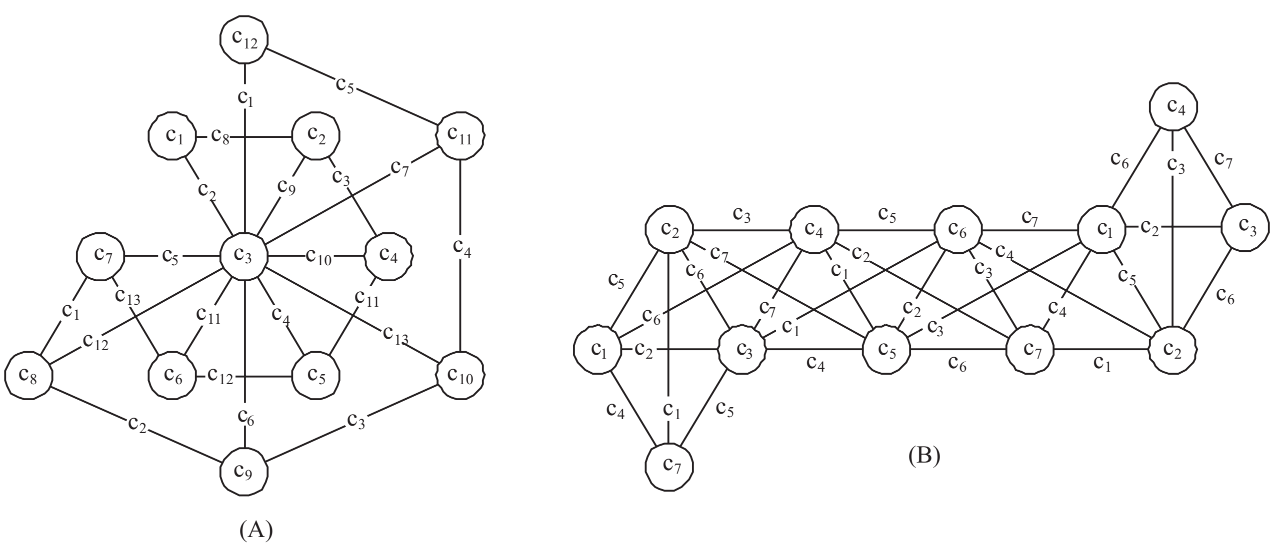

**Figura 9.** Coloração total de grafos 2-caminho e 3-caminho, respectivamente.

## Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo central o estudo da coloração total em grafos *k*-caminho, isto é, apoiado por dois teoremas e um corolário, mostrou-se que todo grafo *k*-caminho satisfaz a conjectura de Vizing-Behzad para coloração total. Para isso, fez-se uma breve revisão em coloração total, além de apresentar o conceito de coloração de vértices com folga de ordem *k*. Em outras palavras, o texto acima descreveu um trabalho de cunho totalmente teórico, embora a coloração total possa ser utilizada em diversas aplicações, como por exemplo, para gerar algoritmos em redes de interconexão que se representam por grafos, o que pode ser visto em Lozano et all (2008).

## Referências

BEINEKE, L. W.; PIPERT, R. E. Properties and characterizations of k-trees. *Mathematika*, London, v. 18, p. 141-151, 1971.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. New York: North-Holland, 1976.

DIESTEL, R. *Graph theory*. New York: Springer-Verlag, 1997.

FONSECA, H. A. *K-árvores*: caracterização, propriedades e aplicações. 2000. 117 f. Dissertação (Mestrado em Sistemas e Computação)- Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2000.

FROTA, Y. A. M. *Problemas de coloração em grafos*. 2008. 132 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação)-Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

GOLUMBIC, M. C. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Amsterdam: Elsevier, 2004.

ISOBE, S. *Algorithms for the total colorings of graphs*. Ph. D. Thesis, Tohoku University, Japan, 2002.

LOZANO, A. R. G.; FRIEDMANN, C. V. P.; JURKIEWICZ, S. Coloração total equilibrada de grafos: um modelo para redes de interconexão. *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, v. 28, n. 1, p. 161-171, 2008.

LOZANO, A. R. G. et al. Coloração de vértices com folga. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 41., Porto Seguro, 2009. *Anais*... Porto Seguro: SBPO, 2009. p. 3084-3091.

MARKENZON, L.; JUSTEL, C. M.; PACIORNIK, N. Sub-classes of k-trees: characterization and recognition. *Discrete Applied Mathematics*, North-Holland, v. 154, n. 5, p. 818-825, 2006.

MARKENZON, L.; VERNET, O. *Percursos em grafos e suas aplicações*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO EM PESQUISA OPERACIONAL, 34., 2002, Rio de Janeiro. *Anais*... Rio de Janeiro: SBPO, 2002. p. 1-33.

MARKENZON, L.; VERNET, O. *Representações computacionais de grafos*. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2006.

MARKENZON, L. et al. Uma caracterização de grafos caminho-completo. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 39., 2007, Fortaleza. *Anais*... Fortaleza: SBPO, 2007.

PEREIRA, P. R. C. *Códigos para subfamílias de grafos cordais*. 2007. 127 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação)-Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

PROSKUROWSKI, A. Separating subgraphs in *k*-trees: cables and caterpillars. *Discrete Mathematics*, North-Holland, v. 49, p. 275-285, 1984.

ROSE, D. J. On simple characterizations of k-trees. *Discrete Mathematics*, North-Holland, v. 7, p. 317-322, 1974.

YAP, H. P. *Some topics in graph theory*. London: Cambridge University Press, 1986.

YAP, H. P. *Total colorings of graphs*. Berlin: Springer, 1996.