RESPOSTA DE UM SISTEMA MASSA-MOLA SUBMETIDO A CARGA ARBITRÁRIA

Marcela Scalco Freitas
Bolsista de Iniciação Científica do NEXEM, CST-UFES
Curso de Engenharia Civil
Centro Tecnológico
Universidade Federal do Espírito Santo

Walnório Graça Ferreira, D.Sc.
Professor
Núcleo de Excelência em Estruturas Metálicas e Mistas (NEXEM, CST-UFES)
Curso de Engenharia Civil
Centro Tecnológico
Universidade Federal do Espírito Santo

Resumo

Apresenta-se neste artigo a resposta de um sistema massa-mola submetido a carga dinâmica arbitrária. Essa resposta é encontrada usando-se a integral de Duhamel, cujo procedimento também é chamado de Método da Integral de Convolução. Ele é derivado da superposição da resposta a impulsos de curta duração. Como nem sempre é possível encontrar uma resposta analítica, apresenta-se aqui os procedimentos para a avaliação numérica da integral de Duhamel. No final um exemplo numérico ilustra a aplicação do método.
Palavras-chave: *Análise dinâmica, carga arbitrária, integral de Duhamel.*

Abstract

This paper presents the response of a spring-mass system submitted to an arbitrary dynamic excitation. That response is evaluated using the Duhamel Integral Method *also called* Convolution Integral Method. *In this method the total response is obtained by adding the responses of an infinite number of impulses. The analytical response it is not always possible. Thus, it is presented here the procedures for numerical assessment of the Duhamel integral. Finally it is shown a numerical example to illustrate this methodology.*
Key-Words: *Dynamic analysis, arbitrary load, Duhamel integral.*

I. Introdução

Quando em um sistema massa-mola atuam forças periódicas de forma geral, estas podem ser representadas por uma superposição de termos harmônicos de várias freqüências. A resposta de sistemas lineares é encontrada pela superposição da resposta harmônica de cada componente harmônico da carga. Quando a carga aplicada ao sistema é não-periódica várias técnicas podem ser aplicadas para se obter a resposta, como o método da integral de Duhamel (solução no domínio do tempo), o método da transformada de Laplace, o método da transformada de Fourier (solução no domínio da freqüência) ou usando-se um método passo-a-passo, no qual procura-se atender à condição de equilíbrio dinâmico, em cada passo, recorrendo-se à integração numérica, sendo este procedimento adequado para análise não-linear.

Este artigo apresenta o método da integral de Duhamel, que também pode ser chamado de método da integral de convolução. Neste método a carga dinâmica é considerada como uma sucessão de impulsos de curta duração e a resposta de cada impulso, em vibração livre, torna-se uma contribuição separada para a resposta total nos tempos subsequentes.

II. Resposta para um Impulso de Curta Duração

Considere um sistema com um grau de liberdade (1*GL*), sem amortecimento, submetido a um impulso de curta duração, ou seja, quando o tempo de excitação t_d é muito menor que o período natural T_n ($t_d << T_n$). Esse impulso pode ser definido como:

$$I = \int_0^{td} p(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

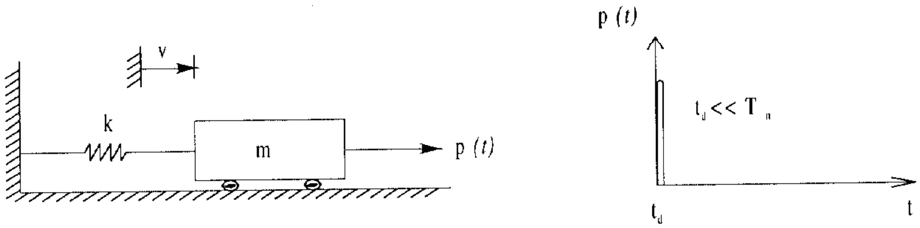

Figura 1. Sistema 1*GL* submetido a um impulso.

Nessa situação a equação do movimento e as condições iniciais são:

$$m\ddot{v} + kv = p(t) \qquad 0 < t \leq t_d \qquad (2a)$$

$$m\ddot{v} + kv = 0 \qquad t > t_d \qquad (2b)$$

$$v(0) = 0 \;;\; \dot{v}(0) = 0 \qquad (2c)$$

Sendo *p(t)* a carga de curta duração atuando no intervalo $0 < t \leq td$ e $\dot{v}(0)$ e $v(0)$, deslocamento e velocidade iniciais, respectivamente.

Dividindo a Eq. (2b) por *m*, e reescrevendo-a obtêm-se

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0 \qquad (3)$$

Onde $\omega^2 = k/m$, sendo ω a freqüência natural do dado sistema massa-mola. Assim a equação característica será

$$s^2 + \omega^2 = 0 \qquad (4)$$

cuja solução é

$$s_{1,2} = \pm\, \omega i \qquad (5)$$

Dessa forma a solução da Eq. (3) pode ser expressa como

$$v = C_1\, e^{i\omega t} + C_2\, e^{-i\omega t} \qquad (6)$$

Na Eq. (6), C_1 e C_2 são constantes complexas. Porém, levando-se em conta que a resposta deve ser real, C_1 e C_2 devem ser complexas conjugadas. Conseqüentemente, usando-se o par de equações de Euler, a Eq. (6) assume a forma

$$v = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad (7)$$

As constantes A e B são determinadas das condições iniciais, $v(0) = v_0$ e $\dot{v}(0) = \dot{v}_0$ das quais se obterão

$$A = v_0 \qquad (8a)$$

$$B = \frac{\dot{v}_0}{\omega} \qquad (8b)$$

Conseqüentemente,

$$v = v_0\cos\omega t + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)\mathrm{sen}\,\omega t \qquad (9)$$

Integrando, no tempo, a Eq. (2a) e introduzindo as condições iniciais nulas (Eq. (2c)), obtém-se

$$m\dot{v}(t_d) + kv_{avg}t_d = I \qquad (10)$$

Onde υ_{avg} é uma média do deslocamento no tempo interno $0 < t \leq t_d$.

Quando $t_d \to 0$ O segundo termo da Eq. (10) pode ser ignorado. Logo,

$$m\dot{v}(0^+) = I$$

Portanto, um impulso consistindo de uma elevada força atuando em curto espaço de tempo tem o efeito de dar à massa uma velocidade inicial dada por:

$$\dot{v}(0^+) = \frac{I}{m} \qquad (11)$$

Ficando a massa com um deslocamento inicial dado por:

$$v(0^+) = 0 \qquad (12)$$

Isto pode ser usado como condições *iniciais* para o problema de vibração livre da Eq. (2b). Usando esses valores na Eq. (9), a resposta ao impulso valerá:

$$v(t) = \left(\frac{I}{m\omega}\right)\mathrm{sen}\,\omega t \qquad (13a)$$

Pode ser mostrado, também, que a resposta ao impulso para um sistema com 1*GL* com amortecimento viscoso $(\xi < 1)$ é

$$v(t) = \left(\frac{I}{m\omega_d}\right)e^{-\xi w t}\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad (13b)$$

As funções de resposta ao impulso unitário são obtidas das Eqs. (13a) e (14b) para sistemas não-amortecidos e amortecidos, respectivamente, quando adota-se $I = 1$.

III. Resposta para Carga Arbitrária

Considere um sistema com 1*GL* sem amortecimento, iniciando no repouso e logo após submetido a uma força *p(t)* mostrada na Fig. 1. A resposta do sistema causada pelo impulso $dI = p(\tau).\,d\tau$ é chamada $dv(t)$ e é obtida da Eq. (13a), resultando:

$$dv(t) = \left(\frac{dI}{m\omega}\right)\operatorname{sen}\,\omega(t-\tau) \qquad (14)$$

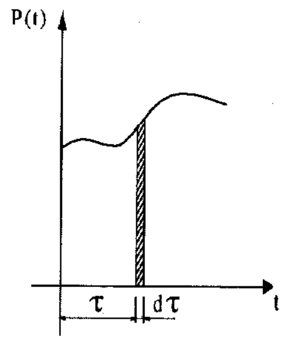

Figura 2. Excitação dinâmica arbitrária.

A resposta total devida à excitação arbitrária *p(t)* é obtida somando as respostas de todos impulsos infinitesimais $p(\tau)d\tau$, isto é, integrando a Eq. (14), ou seja:

$$v(t) = \left(\frac{1}{m\omega}\right)\int_0^t p(\tau)\operatorname{sen}\,\omega(t-\tau)\,d\tau \qquad (15)$$

Esta equação é conhecida como *Equação Integral de Duhamel*. É usada para calcular a resposta de um sistema massa-mola submetido a uma carga arbitrária. Ela também pode ser expressa na forma de uma *integral de convolução*, da seguinte forma

$$v(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad t \geq 0 \qquad (16a)$$

onde

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega}\operatorname{sen}\,\omega(t-\tau) \qquad (16b)$$

Para um sistema dotado de amortecimento viscoso, a integral de Duhamel assumirá a forma

$$v(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d}\right)\int_0^t p(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\operatorname{sen}\,\omega_d(t-\tau)\,d\tau \qquad (17)$$

Quando o sistema possuir condições iniciais não-nulas, a resposta será dada por:

$$v(t) = \left(\frac{1}{m\omega}\right)\int_0^t p(\tau)\operatorname{sen}\,\omega(t-\tau)\,d\tau + v_0\cos\omega t + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)\operatorname{sen}\,\omega t \qquad (18)$$

para o sistema não-amortecido. E

$$v(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d}\right)\int_0^t p(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\operatorname{sen}\omega_d(t-\tau)\,d\tau + v_0\,e^{-\xi\omega\tau}\cos\omega_d t + \left(\frac{1}{\omega_d}\right)(\dot{v}_0 + \xi\omega v_0)e^{-\xi\omega t}\operatorname{sen}\,\omega_d t \qquad (19)$$

para o sistema amortecido.

Se a expressão que define o carregamento no tempo, *p(t)*, é analiticamente simples, a integral de Duhamel pode ser calculada diretamente. Porém, há situações em que isso não é possível, como é o caso em que a função de carga é determinada experimentalmente. Dessa maneira, a integral deve ser calculada através de procedimentos numéricos. Para desenvolver esse procedimento, faz-se uso da seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\omega t - \omega\tau) = [\operatorname{sen}\,\omega t\,\cos\,\omega\tau\, - \,\cos\,\omega t\,\operatorname{sen}\,\omega\tau] \qquad (20)$$

Então a integral da Eq. (15) pode ser escrita como

$$v(t) = \operatorname{sen}\,\omega t\left[\frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\right] - \cos\omega t\left[\frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\operatorname{sen}\,\omega\tau\,d\tau\right] \qquad (21)$$

ou melhor

$$v(t) = [\,\bar{A}(t)\operatorname{sen}\,\omega t\, - \,\bar{B}(t)\cos\,\omega t\,] \qquad (22)$$

Onde

$$\bar{A}(t) \equiv \frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\cos\,w\,\tau\,d\tau \qquad (23a)$$

e

$$\bar{B}(t) \equiv \frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\operatorname{sen}\,w\,\tau\,d\tau \qquad (23b)$$

Agora as integrais em $\bar{A}(t)$ e $\bar{B}(t)$ serão avaliadas numericamente. Nesse caso, divide-se o tempo em um número discreto de pontos, adotando-se por conveniência, iguais intervalos $\Delta\tau$ de tempo. Assim, tanto a carga quanto os integrandos de $\bar{A}(t)$ e $\bar{B}(t)$,

$$y = p(\tau)\cos\omega\tau \qquad \text{e} \qquad z = p(\tau)\operatorname{sen}\omega\tau$$

respectivamente, são avaliados naqueles pontos discretos.

Usando-se a regra de Simpson, em sua forma recursiva, as Eq. (23a) e Eq. (23b) serão dadas por

$$\bar{A}_N \cong \bar{A}_{N-2} + \frac{\Delta\tau}{3m\omega}[y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N] \qquad N = 2,4,6,8,\ldots \qquad (24a)$$

$$\bar{B}_N \cong \bar{B}_{N-2} + \frac{\Delta\tau}{3m\omega}[y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N] \qquad N = 2.4.6.8\ldots \qquad (24b)$$

Finalmente a resposta valerá:

$$v_N = [\ \bar{A}_N \text{ sen } \omega t_N - \bar{B}_N \cos \omega t_N\ ] \qquad (25)$$

EXEMPLO NUMÉRICO

A Fig. 3 mostra uma caixa d'água elevada e a carga dinâmica transiente à qual está submetida. Esta carga tenta simular a ação de uma rajada de vento. A resposta será avaliada numericamente pela Eq. (25).

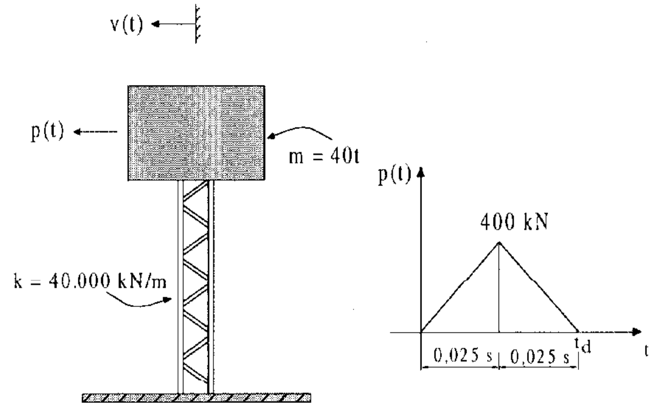

Figura 3. Caixa de água elevada e carga de vento

Para esse sistema, a freqüência angular e o período são respectivamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40.000}{40}} = 31.62 \text{ rad/s} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.20 \text{ s}$$

O incremento de tempo usado na integração numérica foi $\Delta\tau = 0.005\ s$, o qual corresponde a um incremento angular em vibrações livres de $\omega\Delta\tau = 0.15$ *rad*.

A análise numérica é realizada considerando o sistema com e sem amortecimento. Para o sistema amortecido adota-se um modelo com taxa de amortecimento viscoso igual a *5%* $(\xi = 0.05)$. Os gráficos (tempo *x* deslocamento) das respostas para os casos amortecido e não amortecido são mostrados na Fig. 4.

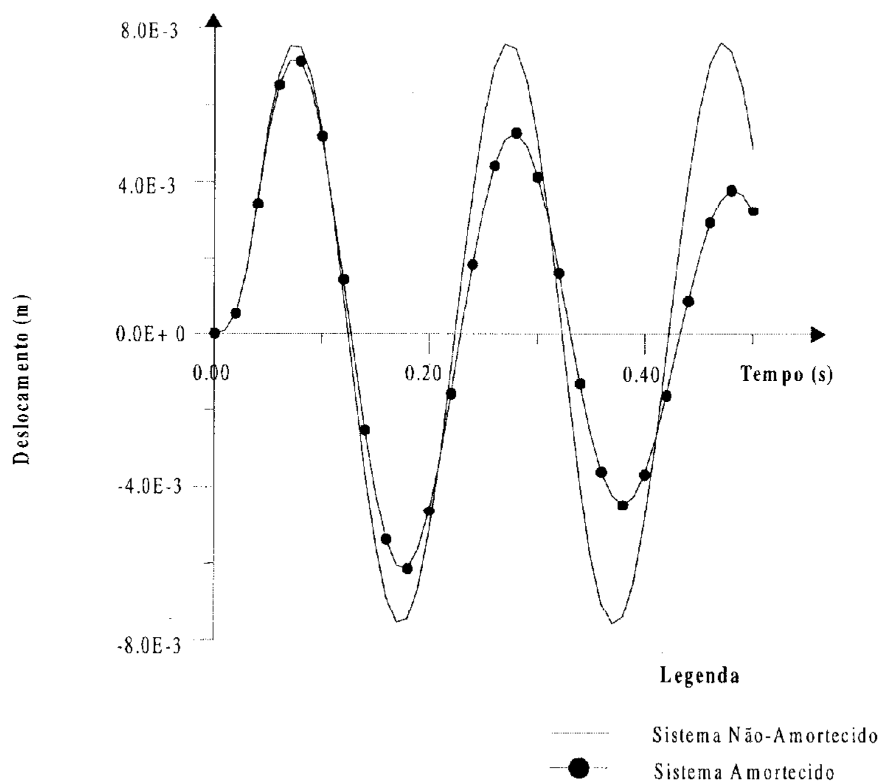

Figura 4. Respostas à carga transiente mostrada na Fig3

IV- Conclusões

Este trabalho apresenta o método da integral de Duhamel para o cálculo da resposta de um sistema massa-mola submetido a carga dinâmica arbitrária. Mostra também um procedimento para a avaliação numérica daquela integral. Com o exemplo numérico pode-se perceber a importância dessa poderosa ferramenta para a avaliação da resposta de sistemas submetidos a cargas dinâmicas de forma genérica.

V- Agradecimentos

A elaboração deste trabalho foi possível graças ao apoio do *NEXEM* (Núcleo de Excelência em Estruturas Metálicas e Mistas), convênio entre a *CST* (Companhia Siderúrgica de Tubarão) e a *UFES* (Universidade Federal do Espírito Santo).

Referências Bibliográficas

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. *Dynamic of structures*. New York: Mac Graw-Hill, 1993.

CRAIG, R. R. *Structural dynamics: an introduction to computer methods*. New York: John Wiley & Sons, 1981.

THOMSON, W. T.; DAHLEH, M.. D. *Theory of vibration with applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.