Uma Visão Crítica dos Métodos para Distribuição de Viagens

Santos, F.L.P.N.(1979) *

INTRODUÇÃO

Apesar de não existir um consenso metodológico em planejamento de transportes, tem aparecido nos países do ocidente um acordo com respeito a definição de etapas que devem ser realizadas sequencialmente durante o processo. Entre elas estão a GERAÇÃO DE VIAGENS a DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS [Santos, 1977]. O objetivo da primeira é determinar no ano meta (futuro) quantas viagens serão originadas e quantas serão atraídas por cada zona de tráfego da área pesquisada. O objetivo da segunda é distribuir entre as demais zonas de tráfego o total de viagens originadas em cada uma delas e determinado com a etapa de geração. Usualmente as viagens numa área de pesquisa são representadas sob forma matricial e chamada de Matriz Origem/Destino ou simplesmente matriz O/D. Chamando de $[\![T_{ij}]\!]$ uma matriz, então o elemento T_{ij} representa o número de viagens originadas na zona i e com destino na zona j. Sendo N o nº de zonas da área pesquisada o processo de Geração de Viagens nos fornece 2N dados que serão utilizados na etapa de distribuição para a determinação de uma matriz N X N. Chamando de A_j o total de viagens atraídas pela zona j e P_i o total de viagens produzidas pela zona i teremos que a matriz O/D deverá satisfazer a:

$$\text{(I)} \quad \sum_{i=1}^{N} T_{ij} = A_j \text{ para } j = 1, 2, \ldots, N \text{ (N equações)}$$

$$\text{(II)} \quad \sum_{j=1}^{N} T_{ij} = P_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N \text{ (N equações)}$$

O problema de distribuição de viagens pode ser posto matematicamente da seguinte forma:
"Determinar uma matriz $[\![T_{ij}]\!]$, N X N, que satisfaça as condições (I) e (II) onde os A_j e P_i para i e j variando de 1 a N são obtidos da etapa de geração de viagens".

Matematicamente portanto o problema não tem solução única (para N>2) uma vez que dispomos de 2N equações e N^2 variáveis a determinar.
Dai a razão da procura de modelos que nos calculem a proporção mais correta possível do volume do tráfego que se origina numa zona e se dirige para as demais zonas da rede. Os modelos de distribuição de viagens consistem essencialmente em admitir hipóteses básicas que melhor interpretem os motivos das viagens. São tentativas de representação matemática de fatores físicos e sociológicos observados. Portanto é possível que um modelo que interpreta razoavelmente bem o comportamento dos viajantes numa cidade européia ou norte-americana, não interprete o comportamento do brasileiro já que este está sujeito nas nossas cidades a condições físicas e sociais diferentes dos primeiros [Crilly, 1973].Este trabalho foi subproduto de um estudo mais amplo e com objetivo acima mencionado.

Com este trabalho mostramos que três métodos de distribuição de viagens conhecidos como FRATAR, FURNESS e DETROIT [Robillard, 1974] nos levarão a uma mesma solução [Santos, 1977].

Isto foi conseguido formulando dois problemas diferentes e chamados de P1 e P2. No lema 1 é mostrado que toda solução de P1 é solução de P2 e vice-versa. No teorema 1 é mostrado que o problema P2 tem solução única e que também deve ser solução única de P1. Em seguida mostramos que os métodos de FRATAR, FURNESS e DETROIT convergem para a solução do problema P1. Portanto os três métodos convergirão para uma única solução.

Dada uma matriz $[\![t_{ij}]\!]$, IxJ com elementos $t_{ij} > 0$ e dado um conjunto de números positivos P_i e A_j com

$$\sum_{i=1}^{I} P_i = \sum_{j=1}^{J} A_j = W,$$ vamos propor os seguintes problemas chamados de P1 e P2.

PROBLEMA P1

Encontrar uma matriz $[\![T_{ij}]\!]$ satisfazendo à:

---

* *Professor Adjunto da Disciplina Circuitos Elétricos da Unifor.*

A1) $\sum_{i=1}^{I} T_{ij} = A_j \quad j=1,J$

A2) $\sum_{j=1}^{J} T_{ij} = P_i \quad i=1,I$

A3) $T_{ij} = r_i s_j t_{ij}$

onde r_i e s_j são constantes positivas para todo i e j.

PROBLEMA P2

Encontrar uma matriz $[\![T_{ij}]\!]$ que seja ponto estacionário de mínimo da função objetivo abaixo e que satisfaça as condições (A.1), (A.2) e (A.5)

A4) $F([\![T_{ij}]\!]) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} T_{ij} ln T_{ij} - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} T_{ij} ln t_{ij}$

A5) $T_{ij} \geqslant 0$ para todo i e j

LEMA 1

Toda solução de P1 é solução de P2 e vice-versa

Demonstração do lema 1

As condições (A.1), (A.2) e (A.5) definem uma região de dimensão (I, J) que chamaremos de região factível D. Considerando o problema P2, queremos minimizar a função dada por (A.4) sobre a região factível D. Para tal vamos construir o Lagrangeano:

A6) $L([\![T_{ij}]\!], \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sum_i \sum_j T_{ij} ln T_{ij} - \sum_i \sum_j T_{ij} \ln t_{ij}$

$+ \sum_i \alpha_i (\sum_j T_{ij} - P_i) + \sum_j \beta_j (\sum_i T_{ij} - A_j)$

Tomando as derivadas parciais de L e igualando-as zero teremos as condições que $[\![T_{ij}]\!]$ deve satisfazer para ser um ponto estacionário:

A7) $\dfrac{\delta L}{\delta T_{ij}} = ln T_{ij} + 1 - ln t_{ij} + \alpha_i + \beta_j = 0$

donde

$ln T_{ij} = -1 - \alpha_i - \beta_j + ln t_{ij}$

$T_{ij} = e^{-1} . e^{-\alpha_i} . e^{-\beta_j} . t_{ij}$

Portanto

A8) $T_{ij} = r_i s_j t_{ij}$

onde

$r_i = e^{-(1+\alpha_i)} > 0$

$s_j = e^{-\beta_j} > 0$

Então uma matriz $[\![T_{ij}]\!]$ será um ponto estacionário se satisfazer as condições (A.1), (A.2), (A.5) e (A.8) No entanto as condições (A.8) e (A.3) são idênticas. Portanto uma matriz que é ponto estacionário de F será solução do problema P1, ou seja, toda solução de P2 é solução de P1.

Seja $[\![T_{ij}^*]\!]$ um ponto estacionário de F. Se $T_{ij}^* > 0$ então a matriz de derivadas segundas de F calculada em $[\![T_{ij}^*]\!]$ é definida positiva com termos $1/T_{ij}^*$ ao longo da diagonal e zero nas demais posições. Portanto $[\![T_{ij}^*]\!]$ é um ponto estacionário de mínimo. Então toda solução de P1 é um ponto estacionário de mínimo de F e portanto solução de P2.

LEMA 2

A função $F([\![T_{ij}]\!])$ dada por (A.4) é estritamente convexa ao conjunto D.

Demonstração

O conjunto D é certamente convexo uma vez que é definido por um conjunto de inequações e equações lineares. O segundo termo da equação (A.4) é linear com T_{ij}. Portanto será suficiente demonstrar que o primeiro termo que chamaremos de $G([\![T_{ij}]\!])$ é estritamente convexo. Então:

$G([\![T_{ij}]\!]) = \sum_i \sum_j T_{ij} ln T_{ij}$

Consideremos agora a função $f(x) = x ln x$. *Evans*, S. P (1973) demonstrou que esta função f (x) é estritamente convexa num intervalo (0,M] onde M é positivo. Se D é conjunto limitado, sempre existirão números positivos M_{ij} tais que

$D \subset \pi_{i,j} (0, M_{ij}]$

onde o símbolo π representa a operação produto cartesiano. Como $G([\![T_{ij}]\!])$ é uma somatória de funções do tipo $T_{ij} ln T_{ij}$, segue-se que ela é restritamente convexa na região $\pi_{i,j} (0, M_{ij}]$ e portanto em D.

TEOREMA 1

O problema P2 tem solução única.

Demonstração

Seja $[\![T_{ij}^*]\!]$ um ponto estacionário de F. Se $T_{ij}^* > 0$ então $[\![T_{ij}^*]\!]$ é um ponto de mínimo como foi mostrado no Lema 1. Pelo Lema 2 a função F é estritamente convexa em D. No entanto se uma função estritamente convexa tem um mínimo local, este mínimo é necessariamente o mínimo sobre todo o conjunto, ou seja, o mínimo global. Portanto o problema P2 tem solução única.

TEOREMA 2

O problema P1 tem solução única.

DEMONSTRAÇÃO

Pelo Lema 1, os problemas P1 e P2 tem conjuntos soluções iguais. No teorema 1 demonstramos que P2 tem uma única solução. Portanto o problema P1 tem uma única solução.

TEOREMA 3

Se o método iterativo de Furness converge[1] então a matriz limite é a única solução do problema P1.

DEMONSTRAÇÃO

Para facilitar a descrição reescreveremos abaixo o método de Furness.

$$t_{ij}^{(1)} = F_i^{(0)} \cdot t_{ij}$$

$$t_{ij}^{(2n)} = F_j^{(2n-1)} \cdot t_{ij}^{(2n-1)}$$

$$t_{ij}^{(2n+1)} = F_i^{(2n)} \cdot t_{ij}^{(2n)}$$

onde

$$\text{A10)}\quad F_i^{(2n)} = \frac{P_i}{\sum_j t_{ij}^{(2n)}}$$

$$\text{A11)}\quad F_j^{(2n-1)} = \frac{A_j}{\sum_i t_{ij}^{(2n-1)}}$$

O método iterativo devido a sua formulação força a satisfação das restrições de produção de viagens nas iterações impares, ou seja, faz com que a soma na linha i da matriz $[\![t_{ij}^{(2n+1)}]\!]$ seja igual a P_i. Analogamente nas iterações pares força a soma das colunas serem iguais aos A_j, s.

Podemos então escrever que:

$$\text{A12)}\quad \sum_j t_{ij}^{(2n+1)} = P_i \qquad \text{para todo } i$$

$$\text{A13)}\quad \sum_i t_{ij}^{(2n)} = A_j \qquad \text{para todo } j$$

Seja $[\![t_{ij}^f]\!]$ a matriz limite. Então será dada por:

$$[\![t_{ij}^f]\!] = \lim_{m\to\infty} [\![t_{ij}^{(m)}]\!] = \lim_{n\to\infty} [\![t_{ij}^{(2n)}]\!] = \lim_{n\to\infty} [\![t_{ij}^{(2n+1)}]\!]$$

Tendo em vista as condições anteriores ela deve então satisfazer as restrições de atração e produção de viagens, ou seja:

$$\text{A14)}\quad \sum_i t_{ij}^f = A_j \qquad \text{para todo } j$$

$$\text{A15)}\quad \sum_j t_{ij}^f = P_i \qquad \text{para todo } i$$

Agora observemos que o método de Furness consiste de multiplicações alternadas de linhas e de colunas. Portanto a (K + 2) - ésima matriz estará relacionada com a k-ésima por:

$$t_{ij}^{(K+2)} = X_i \; Y_j \quad t_{ij}^{(K)} \qquad \text{para todo } i \text{ e } j$$

Portanto se existir uma matriz limite ela será necessariamente da forma

$$\text{A16)}\quad t_{ij}^f = R_i \, S_j \, t_{ij}$$

Podemos concluir então que se o método de Furness converge para uma matriz esta deve satisfazer as condições (A.14), (AA.15) e (A.16). Estas no entanto são respectivamente iguais às condições do problema P1 ou seja, (A.1), (A.2) e (A.3). Então a matriz $[\![t_{ij}^f]\!]$ será solução do problema P1 e portanto única.

TEOREMA 4

Os métodos de Furness e Detroit[1] quando aplicados a uma mesma matriz t_{ij} com elementos positivos convergem para uma mesma matriz solução.

DEMONSTRAÇÃO

O método iterativo de Detroit é dado por:

$$t_{ij}^{(n)} = \frac{F_i^{(n-1)} \cdot F_j^{(n-1)}}{c^{(n-1)}} \times t_{ij}^{(n-1)}$$

Portanto ele consiste de multiplicações de linhas e colunas, donde se o método tente a um limite ele necessariamente será da forma:

$$t_{ij}^d = r_i \, s_j \, t_{ij}$$

satisfazendo a

$$\sum_{i=1}^{N} t_{ij}^d = A_j$$

$$\sum_{j=1}^{N} t_{ij}^d = P_i$$

Portanto a matriz $[\![t_{ij}^d]\!]$ será solução do problema P1. Já foi mostrado no teorema 3 que a matriz $[\![t_{ij}^f]\!]$ resultado da aplicação do método de Furness também é solução de P1. Como o problema P1 tem solução única então

$$[\![t_{ij}^f]\!] = [\![t_{ij}^d]\!]$$

TEOREMA 5

Se o método de Fratar converge, ele e o método de Furness tenderão a uma mesma matriz solução quando aplicados a uma matriz $[\![t_{ij}]\!]$ com elementos positivos.

DEMONSTRAÇÃO

O método iterativo de Fratar é definido por

$$t_{ij}^{(n)} = \frac{F_j^{(n-1)} \cdot P_i}{\sum_{j=1}^{N} t_{ij}^{(n-1)} \cdot F_j^{(n-1)}} \times t_{ij}^{(n-1)}$$

Observemos que o denominador da expressão anterior é uma constante para todos os elementos de uma mesma linha i:

$$\sum_{j=1}^{N} t_{ij}^{(n-1)} \cdot F_j^{(n-1)} = B_i^{(n-1)}$$

Portanto

$$t_{ij}^{(n)} = \frac{F_j^{(n-1)} . P_i}{B_i^{(n-1)}} \quad t_{ij}^{(n-1)}$$

$$t_{ij}^{(n)} = F_j^{(n-1)} . F_i^{(n-1)} \quad t_{ij}^{(n-1)}$$

onde $F_i^{(n-1)} = \frac{P_i}{B_i^{(n-1)}}$

Portanto se o método de Fratar converge a matriz limite será da forma

$$[\![t_{ij}^{fr}]\!] = r_i s_j t_{ij} \quad \text{para todo i e j}$$

satisfazendo a:

$$\sum_{i=1}^{I} t_{ij}^{fr} = A_j \quad \text{para todo j}$$

$$\sum_{j=1}^{J} t_{ij}^{fr} = P_i \quad \text{para todo i}$$

Deste modo ela será solução do Problema P1.

Tendo em vista que o método de Furness também converge para uma solução do P1 e que este tem solução única então os citados métodos convergem para uma mesma solução.

RESULTADOS PRÁTICOS E CONCLUSÕES

Tendo em vista que os três métodos convergem para uma mesma solução procuramos comparar os seus desempenhos no que diz respeito ao número de iteração e tempo de computação. Em geral o número de iterações necessárias para a convergência é função da matriz O/D original (presente), da precisão de convergência e dos valores futuros Aj e Pi. No entanto, fixando a matriz O/D original os valores Aj e Pi e considerando uma mesma precisão de convergência, os desempenhos dos métodos podem ser comparados. Na tabela I mostramos os resultados médios obtidos em diferentes casos analisados:

TABELA I

MÉTODO	TEMPO RELATIVO DE ITERAÇÃO	NÚMERO RELATIVO DE ITERAÇÕES	TEMPO TOTAL
FURNESS	1	2,5	2,5
DETROIT	2	2,5	5,0
FRATAR	2,5	1	2,5

Podemos ver pela tabela acima que os métodos de Furness e Fratar sob o ponto de vista computacional são igualmente competitivos. O método de Detroit no entanto não parece ser promissor haja visto principalmente que os métodos convergem para a mesma solução.

BIBLIOGRAFIA

" Acta Polytechica Scandinavica " (1966) – Civil Engineering and Building Construction Series, nº 37 K.R. Overgaard, Copenhagen

Crilly, M.L. (1974): "A perspective of the Functions and Criticisms of Trip Distribution Models". Operational **Research Quartely**, Vol. 25, nº 1, pp. 111-121.

Cesário, F.J. (1973): "Note ou the Entropy Model of Trip Distribution" **Transportation Research**, Vol. 8., pp. 105-122.

Evans, A.W. (1970): "Some Properties of Trip Distribution Methods" **Transportation Research**, Vol. 4, nº 1, pp. 19-36

Robillard, P. e Stwart, N.F. (1974): "Iterative Numerical Methods for Trip Distribution Problems" **Transportation Research**, Vol. 6, pp. 575-562.

Hutchison, B.G. (1970): "Princípios de Planejamento de Sistemas de Transporte Urbano". Guanabara Dois.

Santos, F. L. P. N. (1977): "Distribuição de Viage.. um estudo e uma aplicação".