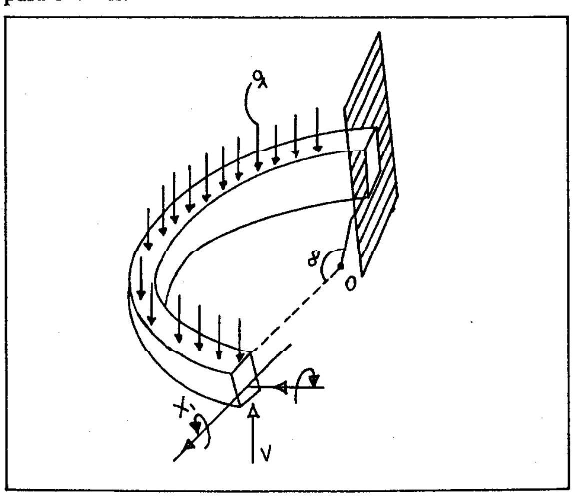
Viga Balcão Circular

Lourenço Humberto Portela Reinaldo *

Este trabalho objetiva determinar os esforços seccionais numa viga balção circular, bi-engastada, com carregamento destribuido e concentrado. De posse das equações destes esforços o leitor poderá programá-lo para seu computador.

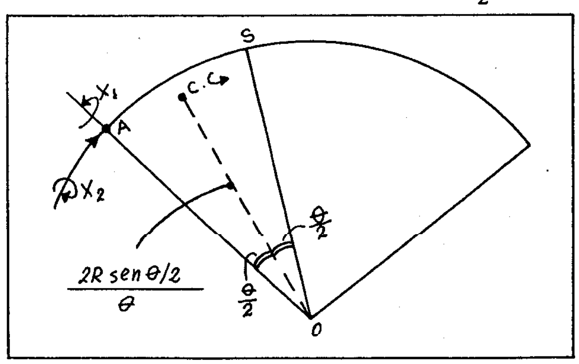
Inicialmente determinaremos a relação entre as rigidezes de flexão e torção. $K = \frac{EJ}{GJt}$. Sabemos que $\frac{E}{G} = 2\,(1 + \mu)$ e, para seção retangular de base $\underline{b}$ e altura $\underline{h}$, $J = \frac{bh^3}{12}$, $Jt = \frac{1}{3}\,(1 - 0{,}63\,\frac{b}{h})\,.\,b^3h$ para $b \leqslant h$ e $Jt = \frac{1}{3}\,(1 - 0{,}63\,\frac{h}{b})\,.\,bh^3$ para $b > h$. Fazendo-se $n = \frac{b}{h}$, teremos:

$K = \frac{1+\mu}{2\,(1 - 0{,}63n)n^2}$ para $b \leqslant h$; e $K = \frac{1+\mu}{2\,(1 - \frac{0{,}63}{n})}$ para $b > h$.



Inicialmente estudaremos a viga com carregamento uniforme. Como Sistema isostático principal, liberaremos uma das extremidades da viga, tomando-se como hiperestáticas os momentos, fletor e torçor, nesta secção.

Por simetria o cortante nesta secção será: $q\,\frac{\alpha R}{2}$



No sistema principal ao lado, CG é o centro de gravidade do arco $\widehat{AS}$. Devido os carregamentos os momentos de flexão e torção no isostático, na seção S, serão respectivamente:

$$M_{f_0} = V.R\,sen\,\theta - qR\theta\,\frac{2R\,sen\,\theta/2}{\theta}\,.\,sen\,\frac{\theta}{2}\,,$$

$$M_{t_0} = qR\,\theta\,R\,(1 - \frac{2\,sen\,\theta/2}{\theta}\,.\,cos\,\theta/2) - VR\,(1 - cos\,\theta),$$

substituindo V por $q\,\frac{R\alpha}{2}$, teríamos:

$$(A)\ \boxed{M_{f_0} = \frac{q\,R^2\,\alpha}{2}\,sen\,\theta - q\,R^2\,(1 - cos\,\theta)}\ \text{e}$$

---

* *Professor adjunto da Disciplina Resistência dos Materiais, da Universidade de Fortaleza.*

(B) $$\boxed{Mt_0 = q\,R^2\,(\theta - \text{sen}\,\theta) - \frac{q\,R^2\,\alpha}{2}\,(1-\cos\theta)}$$

No sistema principal fazendo-se $X_1 = 1$ e depois $X_2 = 1$, teríamos os momentos fletor e torçor, virtuais, em S.

$$\overline{M}f_1 = 1\cos\theta \quad \text{e} \quad \overline{M}t_1 = -1\,\text{sen}\,\theta$$

$$\overline{M}f_2 = 1\,\text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad \overline{M}t_2 = 1\cos\theta$$

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais, teremos:

$$\delta_{11} = \int_0^\alpha \overline{M}f_1 \cdot \overline{M}f_1 \cdot Rd\,\theta + K\int_0^\alpha \overline{M}t_1 \cdot \overline{M}t_1 \cdot Rd\,\theta$$

$$\delta_{22} = \int_0^\alpha \overline{M}f_2 \cdot \overline{M}f_2 \cdot Rd\,\theta +$$

$$+ K\int_0^\alpha \overline{M}t_2 \cdot \overline{M}t_2 \cdot R\,d\,\theta$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^\alpha \overline{M}f_1 \cdot \overline{M}f_2\,Rd\,\theta +$$

$$+ K\int_0^\alpha \overline{M}t_1 \cdot \overline{M}t_2 \cdot Rd\,\theta$$

$$\delta_{10} = \int_0^\alpha \overline{M}f_1 \cdot \overline{M}f_0\,Rd\,\theta + K\int_0^\alpha \overline{M}t_1 \cdot \overline{M}t_0 \cdot Rd\,\theta$$

$$\delta_{20} = \int_0^\alpha \overline{M}f_2 \cdot \overline{M}f_0\,Rd\,\theta + K\int_0^\alpha \overline{M}t_2 \cdot \overline{M}t_0 \cdot Rd\,\theta$$

Substituindo-se, $\overline{M}f_1$, $\overline{M}f_2$, $\overline{M}t_1$, $\overline{M}t_2$, Mf_0 e Mt_0, e integrando-se teremos:

$$\delta_{11} = \left[\frac{\alpha}{2}(1+K) + \frac{\text{sen}2\alpha}{4}(1-K)\right]R \quad \text{ou seja:}$$

$$\delta_{11} = C_1R \qquad (\text{I})$$

$$\delta_{22} = \left[\frac{\alpha}{2}(1+K) +\right.$$

$$\left. + \frac{\text{sen}2\alpha}{4}(K-1)\right]R \text{ ou seja } \delta_{22} = C_2R \qquad (\text{II})$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left[\frac{\text{sen}^2\alpha}{2}(1-K)\right]R \text{ ou seja } \delta_{12} = C_3R \qquad (\text{III})$$

$$\delta_{10} = \left[(1-K)\frac{(\alpha\,\text{sen}^2\alpha + \text{sen}2\alpha)}{4} +\right.$$

$$\left. + (1+K)\left(\frac{\alpha}{2} - \text{sen}\,\alpha\right) + K\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)\right]qR^3$$

$$\text{ou seja } \delta_{10} = C_4 \cdot qR^3 \qquad (\text{IV})$$

$$\delta_{20} = \left[(1+K)\left(\frac{\alpha^2}{4} + \cos\alpha - 1\right) + (K-1)\left(\frac{\alpha\,\text{sen}2\alpha}{8} -\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\text{sen}^2\alpha}{2}\right) + \frac{K\alpha\,.\,\text{sen}\,\alpha}{2}\right]qR^3 \text{ ou seja } \delta_{20} = C_5qR^3 \quad (\text{V})$$

Da equação geral da hiperestática,

$$\delta_{11}\,X_1 + \delta_{12}\,X_2 + \delta_{10} = 0$$

$\delta_{21}\,X_1 + \delta_{22}\,X_2 + \delta_{20} = 0$, resolvendo, teremos

$$X_1 = \frac{C_5\,C_3 - C_4\,C_2}{C_1\,C_2 - C_3^2}\cdot qR^2 \Rightarrow X_1 = K_1\,qR^2 \quad (\text{VI})$$

$$X_2 = \frac{C_4\,C_3 - C_5\,C_1}{C_1\,C_2 - C_3^2}\,qR^2 \Rightarrow X_2 = K_2\,qR^2 \quad (\text{VII})$$

Os momentos, fletor e torçor, numa seção qualquer, serão em função de θ, os seguintes:

$$Mf = Mf_0 + \overline{M}f_1 \cdot X_1 + \overline{M}f_2\,X_2$$

$Mt = Mt_0 + Mt_1X_1 + Mt_2X_2$, então:

$$\boxed{Mf = \left[\text{sen}\,\theta\left(\frac{\alpha}{2} + K_2\right) + \cos\theta\,(1+K_1) - 1\right]qR^2}$$

(VIII)

$$\boxed{Mt = [\cos\theta\,(K_2+1) - \text{sen}\,\theta\,(K_1+1) - 1 + \theta\,]\,qR^2}$$

(IX)

O ponto de momento fletor nulo, θ_0, basta fazer $Mf = 0$ e teremos:

$$\boxed{\theta_0 = \text{arc. sen}\frac{1}{\sqrt{\left(K_2+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (K_1+1)^2}} - \text{arc. tg}\frac{K_1+1}{K_2+\frac{\alpha}{2}}}$$

Exemplo númerico: DADOS

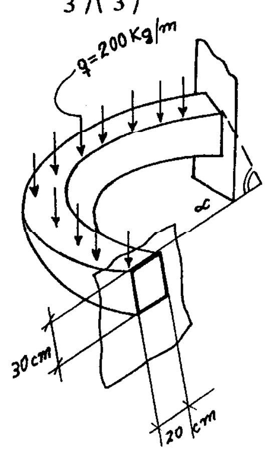
$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\mu = 0{,}2$ (coef. Poisson do concreto)

$q = 200\text{Kg/m}$

Resolvendo-se: $n = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$$K = \frac{1+0{,}2}{2\left(1 - 0{,}63 \times \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow \boxed{K = 2{,}33}$$



Substituindo os valores nas equações (I, II, III, IV e V), teríamos:

$C_1 = 1{,}4556$, $C_2 = 2{,}0315$, $C_3 = -0{,}4987$,

$C_4 = 0{,}1406$ e $C_5 = -0{,}0435$.

Com estes valores usando-se as equações VI e VII, teríamos:

$K_1 = 0{,}0975 \Rightarrow X_1 = -487\text{Kg.m}$

$K_2 = -0{,}0025 \Rightarrow X_2 = -13\text{Kg.m}$

Para achar o momento fletor no meio do vão basta fazer na equação VIII, $\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$ e teremos:

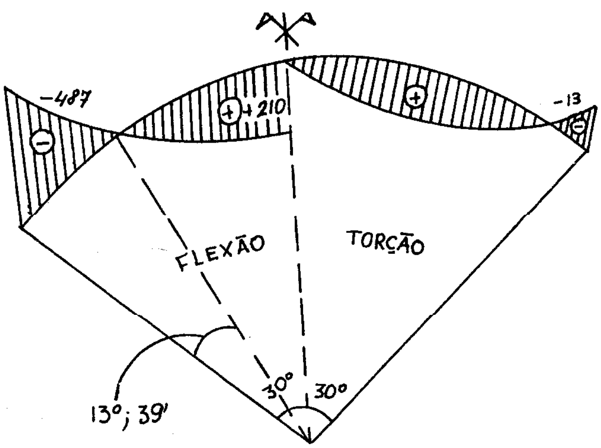
$$M_m = [\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}0025\right) + \cos\frac{\pi}{6}(1 - 0{,}0975) -$$

$$- 1] \times 200 \times 5^2 \Rightarrow M_m = 210\text{Kg.m}$$

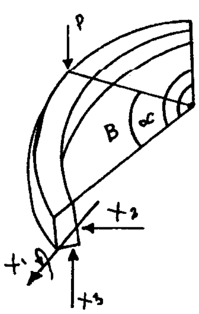
Ponto de momento nulo:

$$\theta_0 = \operatorname{arc.sen}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}0025\right)^2 + (1 - 0{,}0975)^2}} -$$

$$- \operatorname{arc.tg}\frac{1 - 0{,}0975}{\frac{\pi}{6} - 0{,}0025} \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 13°;\ 39'}$$



Para a carga concentrada, na extremidade liberada da viga tomaremos como hiperestáticos X_1, X_2 e X_3; momento fletor, momento troçor e reação de apoio; respectivamente. (Na figura ao lado, é o ângulo central, β posição de carga P e θ um ângulo genérico).
Fazendo-se $X_1 = 1$; $X_2 = 1$ e $X_3 = 1$, teremos:



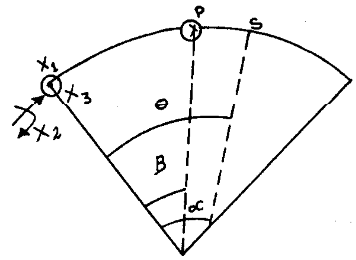
$\overline{Mf}_1 = \cos\theta$ $\quad\overline{Mf}_2 = \operatorname{sen}\theta$ $\quad\overline{Mf}_3 = R\operatorname{sen}\theta$

$\overline{Mt}_1 = -\operatorname{sen}\theta$ $\quad\overline{Mt}_2 = \cos\theta$ $\quad\overline{Mt}_3 = R(\cos\theta - 1)$

Devido ao carregamento, no isostático, os momentos de flexão e torção seriam:

$$\boxed{Mf_0 = PR\operatorname{sen}(\beta - \theta)} \text{ e } \boxed{Mt_0 = PR[(1 - \cos(\theta - \beta)]}$$

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais, teremos:



$$\delta_{11} = \int_0^\alpha \overline{Mf}_1.\overline{Mf}_1 Rd\theta + K\int_0^\alpha \overline{Mt}_1.\overline{Mt}_1 Rd\theta$$

$$\delta_{22} = \int_0^\alpha \overline{Mf}_2.\overline{Mf}_2 Rd\theta + K\int_0^\alpha \overline{Mt}_2.\overline{Mt}_2 Rd\theta$$

$$\delta_{33} = \int_0^\alpha \overline{Mf}_3.\overline{Mf}_3 Rd\theta + K\int_0^\alpha \overline{Mt}_3.\overline{Mt}_3 Rd\theta$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \int_0^\alpha \overline{Mf}_1.\overline{Mf}_2 Rd\theta + K\int_0^\alpha \overline{Mt}_1\overline{Mt}_2 Rd\theta$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int_0^\alpha \overline{Mf}_1.\overline{Mf}_3 Rd\theta + K\int_0^\alpha \overline{Mt}_2\overline{Mt}_3 Rd\theta$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \int_0^\alpha \overline{Mf}_1.\overline{Mf}_3 Rd\theta + K\int_0^\alpha \overline{Mt}_1\overline{Mt}_3 Rd\theta$$

$$\delta_{10} = \int_\beta^\alpha \overline{Mf}_1\overline{Mf}_0 Rd\theta + K\int_\beta^\alpha \overline{Mt}_1.\overline{Mt}_0 Rd\theta$$

$$\delta_{20} = \int_\beta^\alpha \overline{Mf}_2\overline{Mf}_0 Rd\theta + K\int_\beta^\alpha \overline{Mt}_2.\overline{Mt}_0 Rd\theta$$

$$\delta_{30} = \int_\beta^\alpha \overline{Mf}_3.\overline{Mf}_0 Rd\theta + K\int_\beta^\alpha \overline{Mt}_3.\overline{Mt}_0.Rd\theta$$

Substituindo-se, $\overline{Mf}_1$, $\overline{Mf}_2$, $\overline{Mf}_3$, $\overline{Mt}_1$, $\overline{Mt}_2$, $\overline{Mt}_3$, $\overline{Mf}_0$ e integrando-se tereremos:

$$\delta_{11} = \left[\frac{\alpha}{2}(1 + K) + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{4}(1 - K)\right] R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = C_1 R \quad (1)$$

$$\delta_{22} = \left[\frac{\alpha}{2}(1 + K) + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{4}(K - 1)\right] R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{22} = C_2 R \quad (2)$$

$$\delta_{33} = \left[\frac{\alpha}{2}(1 + 3K) + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{4}(K - 1) - 2K\operatorname{sen}\alpha\right] R^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{33} = C_6 R^3 \quad (3)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}(1 - K) R \Rightarrow \delta_{12} = \delta_{21} = C_3 R \quad (4)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \left[\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}(1 - K) + K(1 - \cos\alpha)\right] R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{13} = \delta_{31} = C_7 R_2 \quad (5)$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = \left[\frac{\alpha}{2}(1 + K) + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{4}(K - 1) - K\operatorname{sen}\right] R^2 \Rightarrow$$

$$\rightarrow \delta_{32} = \delta_{23} = C_8 R^2 \quad (6)$$

$$\delta_{10} = [(1+K).\frac{(\alpha - \beta)}{2}\operatorname{sen}\beta + (K - 1)(\cos\beta\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}{2} -$$

$$- \operatorname{sen}\beta\frac{\operatorname{sen}2\alpha - \operatorname{sen}2\beta)}{4} + K(\cos\alpha - \cos\beta)] P . R^2$$

$$\delta_{10} = C_9 . P . R^2 \quad (7)$$

$$\delta_{20} = [(1-K)\left(\operatorname{sen}\beta\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}{2} + \right.$$

$$+ \cos\beta\,\frac{\operatorname{sen}2\alpha - \operatorname{sen}2\beta)}{4} - (K+1)\,\frac{(\alpha-\beta)}{2}\cos\beta +$$

$$+ K(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)]\,P\,.\,R^2$$

$$\delta_{10} = C_{10}\,P.\,R^2 \quad (8)$$

$$\delta_{30} = [(1-K)\left(\operatorname{sen}\beta\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}{2} + \right.$$

$$+ \cos\beta\,\frac{\operatorname{sen}2\alpha - \operatorname{sen}2\beta)}{4} - (1+K)\,\frac{(\alpha-\beta)}{2}\cos\beta +$$

$$+ K(\beta - \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))]\,P\,.\,R^3$$

$$\delta_{30} = C_{11}\,P.\,R^3 \quad (9)$$

Resolvendo-se o sistema

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}\,X_1 + \delta_{12}\,X_2 + \delta_{13}\,X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}\,X_1' + \delta_{22}\,X_2 + \delta_{33}\,X_3 + \delta_{30} = 0 \\ \delta_{31}\,X_1' + \delta_{32}\,X_2 + \delta_{33}\,X_3 + \delta_{30} = 0 \end{array}\right\}\text{Teríamos:}$$

$$X_1 = \frac{\Delta X_1}{\Delta P}\;PR \Rightarrow X_1 = K_3\;PR$$

$$X_2 = \frac{\Delta X_2}{\Delta P}\;PR \Rightarrow X_2 = K_4\;PR$$

$$X_3 = \frac{\Delta X_3}{\Delta P}\;P \Rightarrow X_3 = K_5\;P$$

sendo

$$\Delta P = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_7 \\ C_3 & C_2 & C_8 \\ C_7 & C_8 & C_6 \end{vmatrix};\ \Delta X_1 = -\begin{vmatrix} C_9 & C_3 & C_7 \\ C_{10} & C_2 & C_8 \\ C_{11} & C_8 & C_6 \end{vmatrix};\ \Delta X_2 =$$

$$= -\begin{vmatrix} C_1 & C_9 & C_7 \\ C_2 & C_{10} & C_8 \\ C_7 & C_{11} & C_6 \end{vmatrix}\ e\ \Delta X_3 = -\begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_9 \\ C_3 & C_2 & C_{10} \\ C_7 & C_8 & C_{11} \end{vmatrix}$$

O momento fletor num ponto qualquer, será dado por

$$Mf = Mf_0 + \overline{M}f_1 X_1 + \overline{M}f_2 X_2 + \overline{M}f_3 X_3,$$

e assim teríamos: $Mf = [\,K_3\cos\theta + (K_4 + K_5)\operatorname{sen}\theta -$

$- \operatorname{sen}(\theta - \beta)\,]$ PR para $\theta \geqslant B$ e (10)

$Mf = [\,K_3\cos\theta + (K_4 + K_5)\operatorname{sen}\theta\,]$ PR para $\theta < \beta$.

O momento torçor num ponto qualquer seria

$Mt = [\,K_4\cos\theta - K_3\operatorname{sen}\theta + K_5(\cos\theta - 1) -$

$- \cos(\theta - \beta) + 1\,]$ PR, para $\theta \geqslant \beta$. (11)

$Mt = [\,K_4\cos\theta - K_3\operatorname{sen}\theta + K_5(\cos\theta - 1)\,]$ PR

para $\theta < \beta$.

Para encontrar o momento fletor no ponto de aplicação de P, faremos $\theta = \beta$.

$$\boxed{M_p = [K_3\ \cos\beta + (K_4 + K_5)\operatorname{sen}\beta]\,P.R.} \quad (12)$$

Os momentos, fletor e torçor na outra extremidade ($\theta = \alpha$), seriam:

$X_1' = [\,K_3\cos\alpha + (K_4 + K_5)\operatorname{sen}\alpha -$

$- \operatorname{sen}(\alpha - \beta)\,]$ P.R. (13)

$X_2' = [\,K_4\ \cos\alpha - K_3\operatorname{sen}\alpha + K_5(\cos\alpha - 1) -$

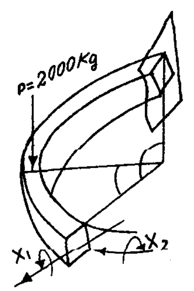
$- \cos(\alpha - \beta) + 1\,]$ P.R. (14)

Exemplo: DADOS

$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $\beta = \dfrac{\pi}{9}$, P = 2000Kg, R = 5m e K =

= 2,33 (viga anterior)

Com estes valores, entrando-se nas equações, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teríamos:



$C_1 = 1{,}4556$ $\qquad C_7 = 0{,}6667$

$C_2 = 2{,}0315$ $\qquad C_8 = 0{,}0137$

$C_3 = -0{,}4987$ $\qquad C_9 = 0{,}2567$

$C_6 = 0{,}4358$ $\qquad C_{10} = -0{,}0851$

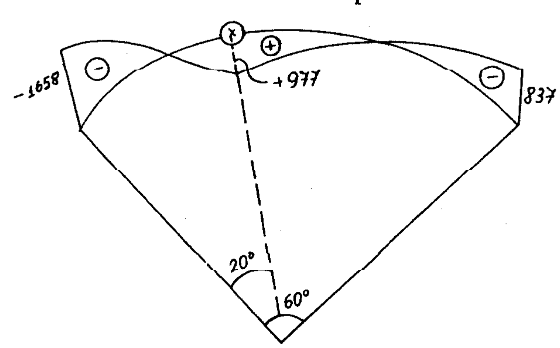
$C_{11} = -0{,}2140$ Com estes valores acharemos:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta p = 0{,}2690 \\ \Delta X_1 = -0{,}0446 \\ \Delta X_2 = -0{,}0010 \\ \Delta X_3 = 0{,}2004 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K_3 = \dfrac{-0{,}0446}{0{,}2690} = -0{,}1658 \\ K_4 = \dfrac{-0{,}0010}{0{,}2690} = -0{,}0037 \\ K_5 = \dfrac{0{,}2004}{0{,}2690} = 0{,}7450 \end{array}$$

Assim sendo teremos

$X_1 = -0{,}1658 \times 2000 \times 5 = -1658$Kg.m;
$X_2 = -0{,}0037 \times 2000 \times 5 = -37$Kg.m;
$X_3 = 0{,}7450 \times 2000 = 1490$Kg

Para achar o momento fletor na outra extremidade, e no ponto de aplicação de P, basta substituir os valores de K_3, K_4 e K_5 nas equações (13) e (12) respectivamente, e teremos $X_1' = -837$Kg.m e $M_p = +977$Kg.m



As reações de apoio serão: $X_3 = 1490$Kg e
$X_3' = 2000 - 1490 \therefore X_3' = 510$Kg