Deslocamentos nas estruturas hiperestáticas planas

• **Benedito Torquato de Oliveira**

Trata-se do cálculo dos deslocamentos provocados pelo carregamento nas estruturas hiperestáticas planas, aplicando o método dos esforços.

Calculam-se os deslocamentos nas estruturas hiperestáticas, empregando diretamente o Teorema de Castigliano, da mesma maneira como é feito para as estruturas isostáticas.

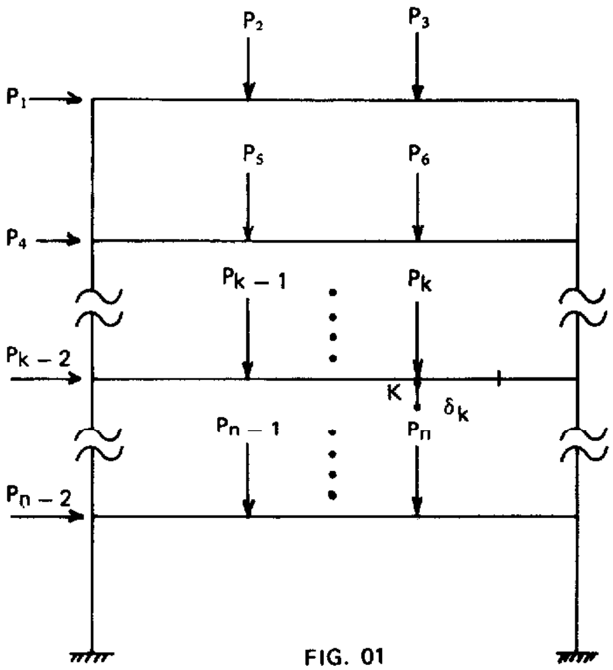
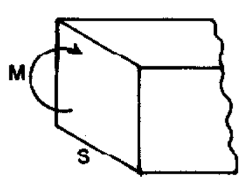


FIG. 01



Seja, por exemplo, o deslocamento vertical δ_k do ponto de aplicação K da carga Pk na estrutura hiperestática da Fig. 01, a qual, vamos supor, seja n, o seu grau de hiperestaticidade. Aplicando o Teorema de Castigliano e desprezando os efeitos do esforço normal e do esforço cortante, quando comparados com os efeitos do momento fletor, teremos:

$$\delta k = \Sigma \int_0^{\ell} \frac{M.\overline{M}}{E.J} \, dx \ldots (1)$$

• Engenheiro Civil. Prof. da Universidade de Fortaleza.

sendo:

M – Momento Fletor numa seção genérica S da estrutura hiperestática, devido ao carregamento dado. Fig. 01

$\overline{M}$ – Momento Fletor na mesma seção genérica S da estrutura hiperestática dada, causado por um esforço unitário $P_k = 1$, atuando sozinho na estrutura no local de P_k. Fig. 02.

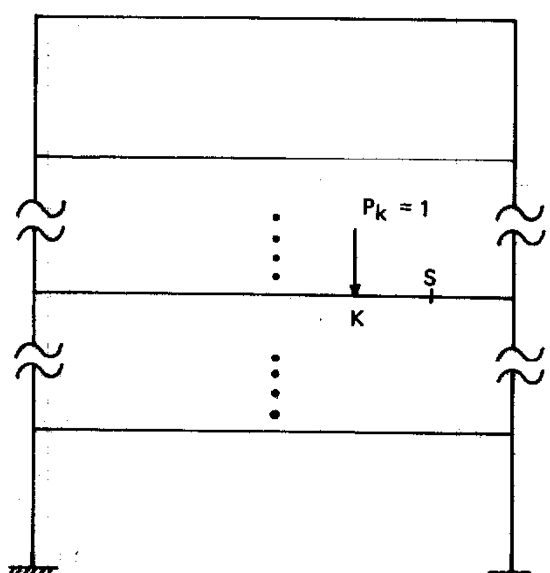
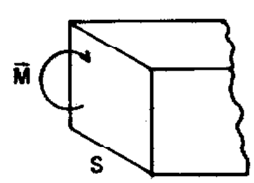


Fig. 02



M_0 — Momento Fletor na mesma seção genérica S, provocado pelo carregamento dado no sistema principal (Estrutura Isostática) e adotado na resolução da estrutura hiperestática dada. Supomos que o referido carregamento seja o da Fig. 03.

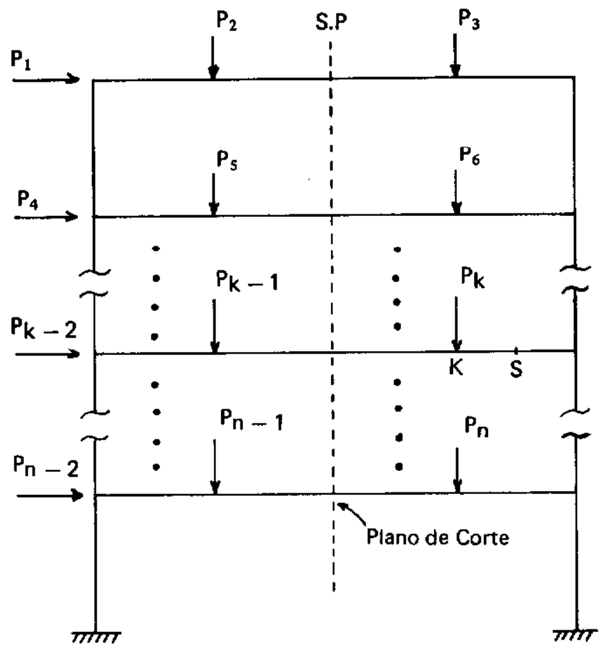
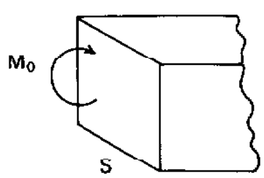


Fig. 03



Sabe-se que pelo princípio da Superposição dos efeitos, temos:

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{M}_1 X'_1 + \bar{M}_2 X'_2 + \; \ldots\ldots \; + \bar{M}_n X'_n \quad (2)$$

sendo que:

$$X'_1 \, ; X'_2 \, ; \ldots \, ; X'_n$$

são os hiperestáticos que surgem nos mesmos vínculos da estrutura hiperestática dada, devido ao único carregamento unitário aplicado no ponto de aplicação K de P_k, quando se obtém o sistema principal da Fig. 03, sendo:

$\bar{M}_0$ — Momento Fletor na mesma seção genérica S do sistema principal, devido ao único carregamento unitário aplicado em K. Fig. 04.

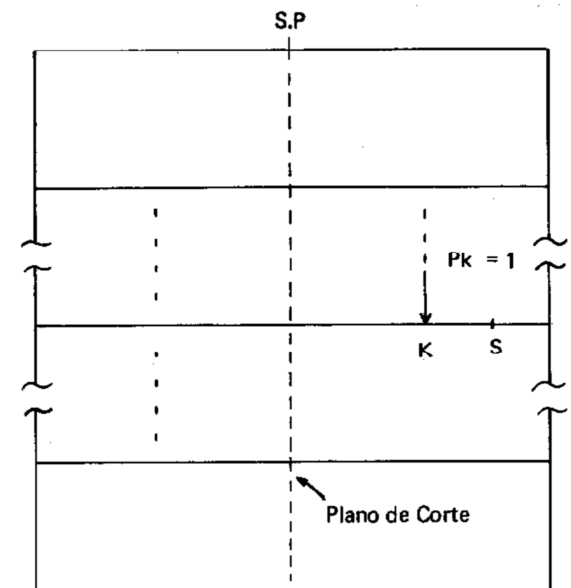
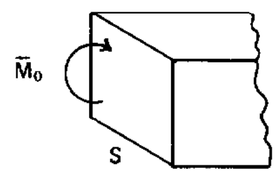


Fig. 04



$\bar{M}_1$ — Momento Fletor na mesma seção genérica S do sistema principal, supondo $X_1 = X'_1 = 1$.

$\bar{M}_2$ — Idem, supondo $X_2 = X'_2 = 1$.

.

.

.

$\bar{M}_n$ — Idem, supondo $X_n = X'_n = 1$.

Substituindo $\bar{M}$ dado em (2), em (1), vem:

$$\delta k = \Sigma \int_0^{\ell} \frac{M(\bar{M}_0 + \bar{M}_1 X'_1 + \bar{M}_2 X'_2 + \ldots + \bar{M}_n M_n)\, dx}{EJ}$$

$$\delta k = \Sigma \int_0^{\ell} \frac{(M\bar{M}_0 + X'_1 M\bar{M}_1 + X'_2 M\bar{M}_2 + \ldots + X'_n M\bar{M}_n)\, d}{EJ}$$

$$\delta k = \Sigma \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_0}{EJ} dx + X'_1 \Big[\Sigma \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_1}{EJ} dx\Big] + X'_2 \Big[\Sigma \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_2}{EJ} dx\Big] + \ldots + X'_n \Big[\Sigma \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_n}{EJ} dx\Big]$$

Sabe-se, também, pelo Princípio de Superposição dos efeitos que:

$$M = M_0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 \ldots\ldots\ldots + \bar{M}n Xn$$

Substituindo-se nas integrais acima, temos:

$$\delta k = \Sigma\int_0^\ell \frac{M\bar{M}_0}{EJ}dx + X'_1\left[\Sigma\int_0^\ell \frac{(Mo + \bar{M}_1X_1 + \ldots\ldots + \bar{M}_nX_n)\bar{M}_1}{EJ}dx\right]$$

$$+ X'_2\left[\Sigma\int_0^\ell \frac{(Mo + \bar{M}_1X_1 + \bar{M}_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + \bar{M}_nX_n)\bar{M}_2}{EJ}dx\right] + \ldots +$$

$$+ X'n\left[\Sigma\int_0^\ell \frac{(Mo + \bar{M}_1X_1 + \bar{M}_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + \bar{M}_nX_n)\bar{M}_n}{EJ}dx\right]$$

Desenvolvendo a expressão acima, temos:

$$\delta k = \Sigma\int_0^\ell \frac{M\bar{M}o}{EJ}dx + X'_1\left[\Sigma\int_0^\ell \frac{Mo\bar{M}_1}{EJ}dx + X_1\left(\Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EJ}dx\right) + X_2\left(\Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_2\bar{M}_1}{EJ}dx\right) + \ldots + Xn\left(\Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}n\bar{M}_1}{EJ}dx\right)\right] +$$

$$+ X'_n\left[\Sigma\int_0^\ell \frac{Mo\bar{M}_n}{EJ}dx + X_1\left(\Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_n}{EJ}dx\right) + X_2\left(\Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_2\bar{M}n}{EJ}dx\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + Xn\left(\Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_n\bar{M}_n}{EJ}dx\right)\right] \quad (3)$$

Como:

$$\delta_{11} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EJ}dx$$

$$\delta_{12} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_2\bar{M}_1}{EJ}dx$$

.
.
.

$$\delta_{1n} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_n\bar{M}_1}{EJ}dx$$

$$\delta_{10} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}o\bar{M}_1}{EJ}dx$$

$$\delta_{21} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_2}{EJ}dx$$

$$\delta_{22} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_2\bar{M}_2}{EJ}dx$$

.
.
.

$$\delta_{2n} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_n\bar{M}_2}{EJ}dx$$

$$\delta_{20} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}o\bar{M}_2}{EJ}dx$$

$$\delta_{n1} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_n}{EJ}dx$$

$$\delta_{n2} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_2\bar{M}_n}{EJ}dx$$

.
.
.

$$\delta_{nn} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}_n\bar{M}_n}{EJ}dx$$

$$\delta_{no} = \Sigma\int_0^\ell \frac{\bar{M}o\bar{M}_n}{EJ}dx$$

Substituindo esses valores em (3), fica:

$$\delta k = \Sigma\int_0^\ell \frac{M\bar{M}_0}{EJ} + X'_1(\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 \ldots + \delta_{1n}Xn + \delta_{10}) + X'_2(\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_{22} + \ldots + \delta_{2n}Xn + \delta_{20}) + \ldots\ldots +$$

$$X'n(\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}Xn + \delta_{n0}) \quad (4).$$

Pelo Método dos Esforços, sabe-se que:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0$$

. . . .

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}Xn + \delta_{no} = 0$$

Que substituidas em (4), resulta:

$$\boxed{\delta k = \Sigma\int_0^\ell \frac{M\bar{M}o}{EJ}dx} \quad (5)$$

Da análise da expressão (5), conclui-se que:

$$\boxed{\delta k = \Sigma\int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EJ}dx = \Sigma\int_0^\ell \frac{M\bar{M}o}{EJ}dx}$$

Observamos que não é mais necessário resolver duas vezes a Estrutura Hiperestática em busca das funções M e $\bar{M}_O$. Portanto, com a aplicação de (5), só resolvemos uma vez a estrutura hiperestática dada, para obter-se as funções M, pois as funções $\bar{M}o$, como já foi visto, são decorrentes do único carregamento unitário aplicado no Sistema principal (Estrutura Isostática), no ponto de aplicação K da carga P_K.

DADOS BIBLIOGRÁFICOS

DARCOV, A AND KUZNETSOV, V. *"Structural mechanics"*. 1a ed., Moscow, Mir Publishers, 703p.

FEODOSSIEV, V. *"Résistance des matériaux"*. 1a. ed. Moscow, Éditions de La Paix, 572 p.

MOREIRA DA ROCHA, ADERSON *"Hiperestática Plana Geral"* 3a. ed. Rio de Janeiro, Editora Científica, 1972. 426 p.