

Análise bidimensional de estruturas de concreto protendido em regime de serviço. (2.ª Parte) -

Continuação do número anterior.

* **Gulielmo Viana Dantas**

Apresentam-se a formulação incremental das equações de equilíbrio, o algoritmo de solução, a idealização estrutural, exemplos comparativos, conclusões e bibliografia.

4. FORMULAÇÃO INCREMENTAL DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações de equilíbrio do problema fisicamente não linear podem ser obtidas para o tempo $t + \Delta t$ a partir do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = R \quad (7)$$

onde σ_{ij} e $\delta \epsilon_{ij}$ são respectivamente as componentes do tensor de tensões e da variação do tensor de deformações da estrutura e R significa o trabalho virtual externo total realizado pelas forças de massa e de superfície sobre a variação de deslocamentos δu_i , para o tempo $t + \Delta t$. Os índices $i, j = 1, 2$ dizem respeito às direções coordenadas x e y da estrutura; índices repetidos indicam somatório.

A equação (7) pode ser resolvida incrementalmente, uma vez conhecida sua solução no instante t . Usa-se aqui uma formulação iterativa para o estabelecimento do equilíbrio, conhecido como "método da transferência das tensões" [12], como se expõe a seguir.

Para cada incremento de tempo e de carregamento, determinam-se inicialmente os incrementos $\Delta \epsilon_{kl}$ de deformações pela equação linearizada do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} dV = \Delta R + \int_V \delta \epsilon_{ij} C_{ijkl}^{\text{inel}} \Delta \epsilon_{kl}^{\text{inel}} dV \quad (8)$$

onde C_{ijkl} são as componentes do tensor das relações constitutivas tangentes no instante $t + \Delta t$, em função, portanto, do módulo de elasticidade $E_c(t + \Delta t)$; ΔR é o trabalho virtual externo realizado pelo incremento de carregamento sobre a variação de deslocamentos δu_i ; $\Delta \epsilon_{kl}^{\text{inel}}$ representa o acréscimo das deformações inelásticas, dependentes do tempo. Caso haja somente variação do tempo, portanto, $\Delta R = 0$, e, para o caso em que só se incrementa o carregamento, $\Delta \epsilon_{kl}^{\text{inel}} = 0$.

Após a determinação inicial dos incrementos de deformações, pela eq. (8), é estabelecido iterativamente o equilíbrio da estrutura, para o carregamento e o tempo mantidos constantes. A equação de equilíbrio para a k -ésima iteração se escreve:

$$\int_V \delta \epsilon_{ij}^{(k-1)} C_{ijkl}^{(k)} \Delta \epsilon_{kl}^{(k)} dV = \int_V \delta \epsilon_{ij}^{(k-1)} \Delta \sigma_{ij}^{(k)} dV \quad (9)$$

em que

$$\begin{matrix} (k) & (k-1) & (k-1) & (k-1) & (k) \\ (k) & (k-1) & (k-1) & (k-1) & (k) \end{matrix}$$

$$\Delta \sigma_{ij}^{(k)} = [\sigma_{ij}^{(k-1)} + C_{ijkl}^{(k-1)} \Delta \epsilon_{kl}^{(k)}] - \sigma_{ij}^{(k)} \quad (10)$$

são as "tensões excedentes" relativas à k -ésima iteração, de acordo com o método proposto em [12].

$\sigma_{ij}^{(k-1)}$ são as tensões totais encontradas na iteração anterior. O termo entre colchetes na eq. (10) representa portanto as tensões que se espera encontrar na k -ésima iteração $\sigma_{ij}^{(k)}$ são as tensões realmente encontradas, após a verificação de eventuais plastificações, fissuras ou esmagamentos locais.

As equações (8), (9) e (10) são absolutamente gerais, em termos de não-linearidades físicas. Convém notar também que este método da transferência de tensões é uma formulação alternativa ao método de Newton-Raphson, sendo-lhe equivalente sob todos os aspectos matemáticos [10]. As componentes do tensor das relações constitutivas tangentes podem ser reformuladas a cada iteração, quando se tem o método da "rigidez tangente", em que se levam em conta inclusive as perdas de rigidez em virtude de plastificações, fissuras ou esmagamentos locais. Pode-se também conservar C_{ijkl} constante ao longo de toda a análise, o que constitui o método da "rigidez constante". No presente trabalho optou-se por uma formulação intermediária, em que as relações constitutivas tangentes variam somente em função do tempo, pela atualização do módulo de elasticidade do concreto $E_c(t + \Delta t)$.

Apesar do caráter geral do método apresentado, deve-se observar, mais uma vez, que as não-linearidades físicas consideradas são a fissuração, o esmagamento e os efeitos dependentes do tempo, para o concreto, e a plastificação do aço das armaduras comum e de protensão. As equações apresentadas, em termos de trabalhos virtuais, englobam obviamente a contribuição da armadura.

5. ALGORITMO DE SOLUÇÃO

Sumariza-se a seguir o algoritmo de solução desenvolvido a partir da formulação incremental de equilíbrio apresentada:

a) Determina-se o módulo de elasticidade pseudo-instantâneo $E_c(t + \Delta t)$ do concreto [4].

b) Se o instante $t + \Delta t$ for o tempo de início da análise, aplica-se o primeiro incremento de carga (protensão + peso próprio).

c) Determinam-se os incrementos de deformação inelástica nos pontos gaussianos de cada elemento finito. Caso tenha ocorrido fissuração ou esmagamento em algum ponto, não se computam as deformações inelásticas correspondentes. Monta-se o vetor de forças nodais equivalentes.

d) Monta-se a matriz de rigidez da estrutura para o ins-

* Eng.º Civil, M.Sc., Prof. da UNIFOR

		VIGA A				VIGA B			
		KANG		MODELO		KANG		MODELO	
		14 dias	28 dias	14 dias	28 dias	14 dias	28 dias	14 dias	28 dias
δ (in)		-0,059	-0,099	-0,096	-0,133	-0,052	-0,086	-0,086	-0,116
Tensões (ksi) nos elementos de protensão	1	121,90	121,85	121,99	113,48	121,90	121,85	121,99	113,50
	2	121,88	121,81	121,76	113,28	121,88	121,81	121,76	113,30
	3	121,86	121,69	121,50	112,93	121,86	121,78	121,50	112,09
	4	121,85	121,53	121,31	112,65	121,85	121,65	121,31	112,84
	5	121,84	121,38	121,29	112,57	121,84	121,53	121,29	112,67
	6	121,78	121,34	119,51	110,96	121,78	121,49	119,51	111,15
	7	121,68	121,53	118,23	109,94	121,68	121,62	118,23	110,08
	8	121,62	121,57	115,34	108,14	121,62	121,64	116,34	108,29
	9	121,58	121,01	115,21	106,74	121,58	121,18	115,21	106,97
	10	121,56	120,49	112,94	105,19	121,56	120,74	113,94	105,49

Tab. I Sumário dos resultados analíticos antes do carregamento.
 δ é o deslocamento (para cima) no meio do vão.

tante $t + \Delta t$, em função do módulo de elasticidade do concreto.

e) Determinam-se os incrementos de deslocamentos, para os incrementos de carregamento e de deformação inelástica (um ou outro tipo de incremento pode ser nulo).

f) Acumulam-se os incrementos de deformações e tensões nos pontos de integração dos elementos de concreto e aço e verificam-se as tensões máximas admissíveis.

g) Se alguma tensão ultrapassar a tensão máxima admissível, monta-se o vetor de forças nodais equivalentes às "tensões excedentes" e volta-se ao passo e. Caso contrário, passa-se para um novo incremento de tempo ou de carregamento, repetindo-se a análise a partir de a.

Caso a análise seja paralizada no tempo $t + \Delta t$, e somente o carregamento externo varie a partir de então, os efeitos dependentes do tempo até esta data permanecem constantes.

Quando ocorrem fissuras, suas direções são mantidas constantes ao longo do resto da análise. As tensões normais de tração perpendiculares às direções das fissuras são redistribuídas.

6. IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL

O programa de elementos finitos elaborado [9] tem por base um programa desenvolvido pelo prof. D. W. Murray, da Universidade de Alberta, Canadá, e implantado na PUC/RJ. Este programa utiliza alternativamente elementos isoparamétricos lineares, quadráticos ou cúbicos, da família Serendipity, com 4, 8 ou 12 nós, respectivamente, para o estado plano de tensões. Para o tratamento das armaduras de protensão e comum, introduziram-se elementos isoparamétricos unidimensionais quadráticos, cúbicos e do quarto grau, com 3, 4 e 5 nós, respectivamente.

As malhas dos elementos de concreto e de aço podem ser geradas automaticamente e de maneiras independentes entre si [13].

A armadura é dada por trechos curvos, cabendo ao programa determinar as interseções com os elementos de con-

creto e fazer a subdivisão e numeração dos elementos de aço. As matrizes de rigidez dos elementos de aço são expressas em função dos graus de liberdade dos elementos de concreto, pela imposição da condição de aderência perfeita entre concreto e aço.

7. EXEMPLOS

Analisaram-se duas vigas contínuas de dois vãos, simétricas, cujas geometrias e armações protendidas são mostradas na Fig. 6. Estas vigas foram estudadas experimentalmente por Lin [7] e analiticamente por Kang [11].

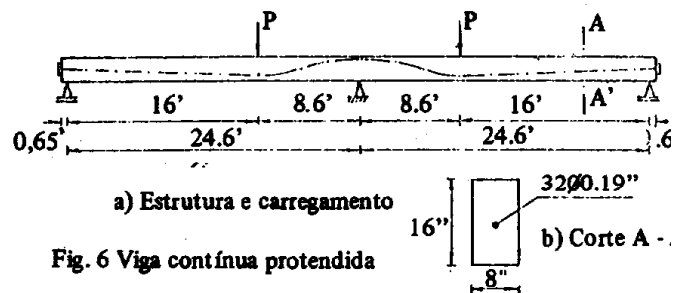


Fig. 6 Viga contínua protendida

A viga B é reforçada com armadura comum (linha tracejada na Fig. 7), enquanto que a viga A não é reforçada.

As características dos materiais utilizados na análise são apresentadas a seguir:

Concreto:	Aço Comum:
$f_{cc} = 5990$ psi	$f_y = 45,5$ ksi
$f_{ct} = 800$ psi	$E_s = 284 \cdot 10^3$ ksi
$\nu = 0,15$	$\epsilon_{u,s} = 10\%$

Aço de protensão:	
$f_{yp} = 208,8$ ksi	$E_{sp} = 29000$ ksi
$A_{sp} = 0,963$ in ²	$\epsilon_{u,sp} = 10\%$
$P_i = 136,746$ kips	$\sigma_i = 142$ ksi
$\nu = 0,30$	$k = 5 \cdot 10^{-4}$ rad/ft
$\Delta L = 1,24$ in	

Metade da viga é analisada com 10 elementos e o cabo de protensão é também dividido em 10 segmentos correspondentes a cada elemento. A Fig. 7 mostra a discretização adotada.

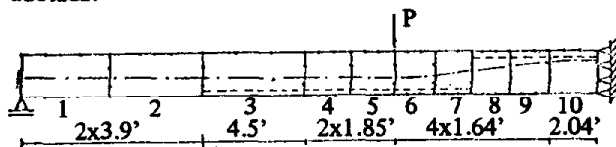


Fig. 7 Discretização da estrutura

14 dias após a confecção da viga, é executada a operação de tracionamento do cabo, com uma protensão inicial de 142 ksi. 2 semanas depois a carga concentrada P é aplicada incrementalmente até a ruptura.

Os resultados analíticos após a operação de tracionamento e antes que a carga concentrada seja aplicada são sumarizados na Tab. I. Apresenta-se o deslocamento do meio do vão (para cima), assim como as tensões em cada elemento de aço protendido. No modelo apresentado há uma perda de cerca de 16% da protensão inicial, devida ao atrito e à acomodação da ancoragem, contra 14% no modelo de Kang. Esta diferença pode ser devida ao fato de que Kang considera todos os elementos de aço protendido como se fossem retos. Os valores das tensões nos dois modelos são aproximadamente iguais até o elemento 5, aos 14 dias. Observa-se também, nesta data, que o deslocamento para cima no meio do vão no modelo de Kang é bem menor que no modelo adotado. Isto é causado em parte pela diferença entre os módulos de elasticidade calculados para o concreto, conforme mostra a Tab. II:

Kang		Modelo	
14 dias	28 dias	14 dias	28 dias
$6,10 \times 10^6$	$6,13 \times 10^6$	$5,13 \times 10^6$	$5,99 \times 10^6$

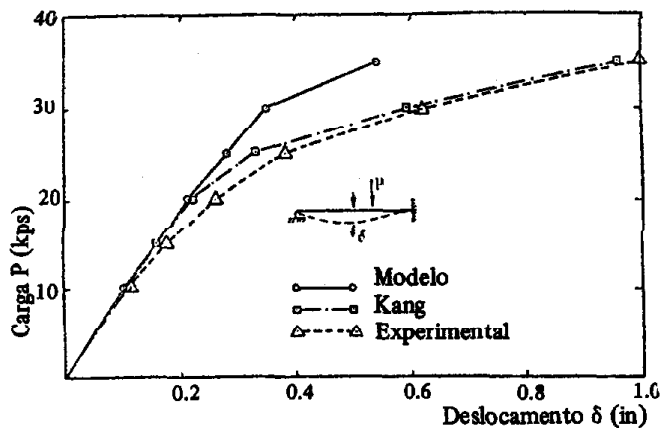
Tab. II Módulos de elasticidade do concreto (psi)

Talvez a razão principal das diferenças observadas na Tab. I reside nas maneiras diversas como foram considerados os efeitos da retração e da deformação lenta, além das perdas de protensão: aqui usou-se basicamente o CEB, enquanto que Kang se guiou pelo ACI.

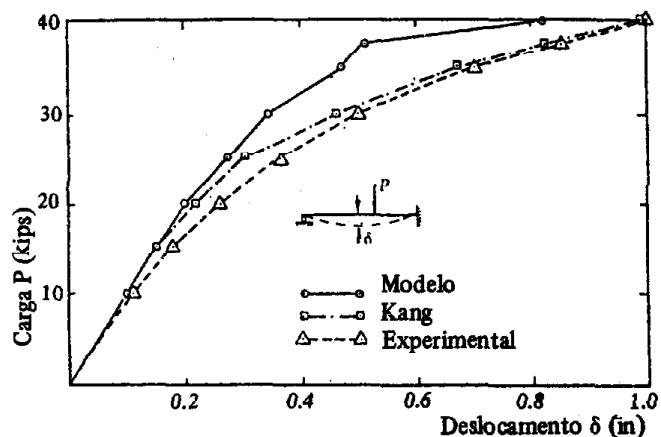
Aos 14 dias de idade, aplicou-se a carga P em incrementos de 5 kips. As cargas últimas, medidas experimentalmente por Lin [7], foram 39,2 kips para a viga A e 45,8 kips para a viga B. A análise realizada por Kang detectou ruptura para a viga A a 40 kips e, para a viga B, a 45 kips. No modelo proposto, a carga de ruptura situou-se para ambas as vigas entre 40 e 45 kips. Uma precisão maior da carga última poderia ter sido encontrada, aqui, com incrementos menores de carga, no final, mas o modelo só é confiável para cargas em regime de serviço, pelas suas premissas, não se justificando outro tipo de análise. No modelo proposto, as cargas de fissura se situaram entre 20 e 25 dips, ao passo que as tensões de compressão ultrapassaram 60% de f_{cc} para P entre 20 e 25 kips, na viga A, e 25 e 30 dips, na viga B.

Na Fig. 8 são mostrados os deslocamentos verticais no meio do vão, experimentais e analíticos. Observando-se estes gráficos e os valores da Tab. I, conclui-se que, de alguma maneira, os efeitos da protensão estão sendo super-

estimados, no modelo proposto. É importante notar que estes exemplos não são muito representativos, pois tratam do comportamento à ruptura de vigas de concreto protendido, e só foram escolhidos pela falta de dados, na literatura, sobre o comportamento de estruturas de concreto protendido em regime de serviço.



a) Viga A (sem armadura comum)



b) Viga B (com armadura comum)

Fig. 8 Comparação dos deslocamentos no meio do vão

Na Fig. 9, finalmente, mostram-se distribuições de tensões nas seções de momento máximo positivo e negativo, para $P = 0$ e $P = 35$ kips, em ambas as vigas. As tensões no aço comum e de protensão são representadas em escala diferente das tensões no concreto. Convém notar que, embora Kang use um elemento de viga dividido em dez camadas, as distribuições de tensões concordam bastante nos dois modelos, a menos do fato já mencionado, de que, no modelo proposto, os efeitos da protensão se fazem mais acentuados: as tensões são maiores no concreto (compressão) e menores no aço, tornando a estrutura mais rígida.

8. CONCLUSÕES

Mostrou-se neste trabalho um modelo desenvolvido para a análise de estruturas de concreto protendido, considerando-se os efeitos do tempo e as perdas de protensão, a partir basicamente do CEB. Por não considerar os efeitos de plastificação do concreto, e por outras premissas referentes aos

efeitos do tempo, os resultados são confiáveis somente para tensões de compressão até 60% de f_{cc} . A ênfase do modelo está na maneira precisa como se consideram os efeitos citados. Todavia, serão necessárias comparações exaustivas para o estabelecimento do grau de confiabilidade das hipóteses

usadas em conjunto, permitindo, assim, uma grande versatilidade na análise de estruturas complexas de concreto armado sob estado plano de tensões. Esta versatilidade se acentua mais pela possibilidade de escolha do elemento finito isoparamétrico, além das facilidades de geração automática das malhas.

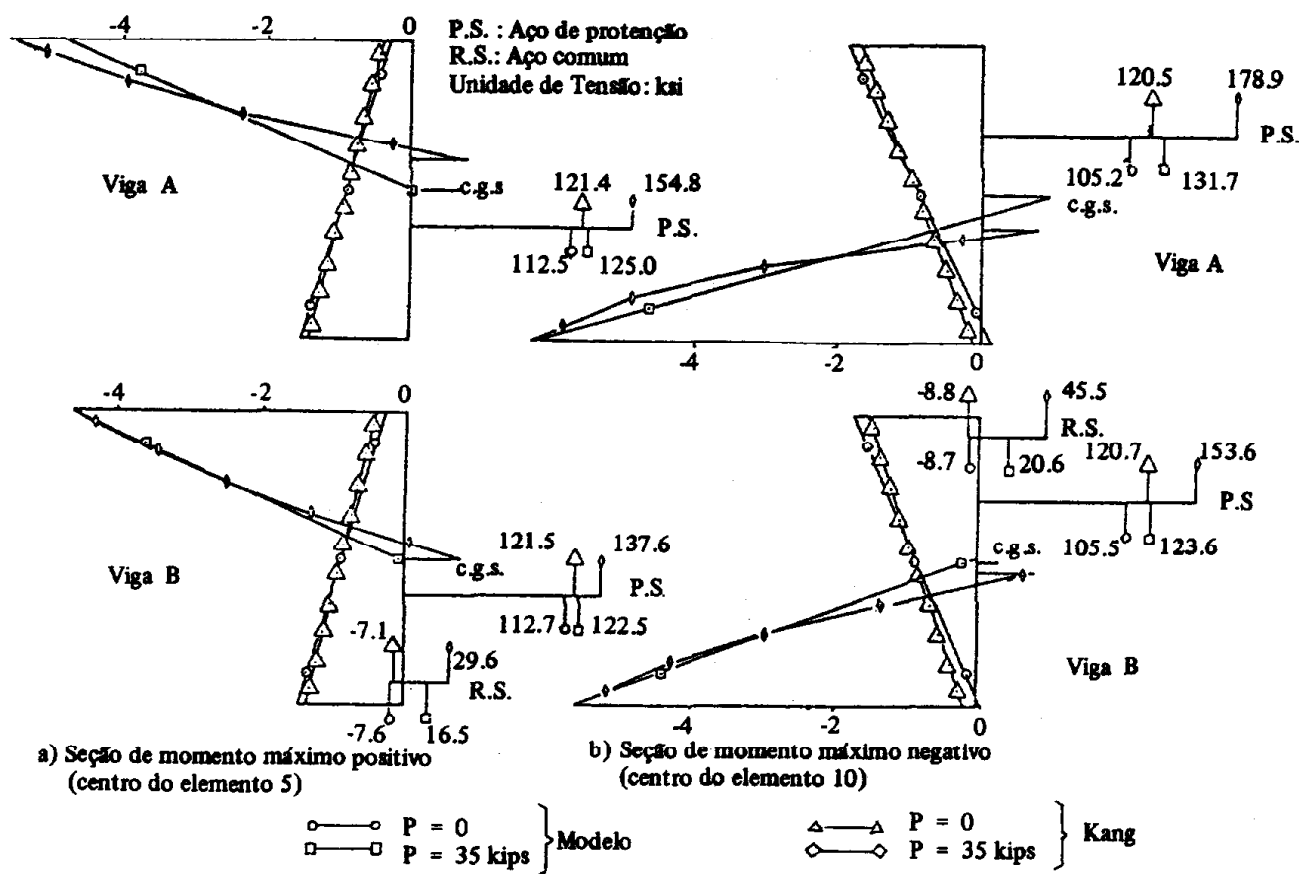


Fig. 9 Distribuição de tensões (ksi) nas seções de momentos máximos positivo e negativo.

9. BIBLIOGRAFIA

- SELNA, L.G.: "Creep, Cracking and Shrinkage in Concrete Frame Structures", Journal of Struct. Division, ASCE, Vol. 15 Dec. 1969.
- : "Time - Dependent Behavior of Reinforced Concrete Structures and Materials", Research Report n.o 67 - 19, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, 1967.
- "Recommendations Pratiques Unifiées pour le Calcul et l'Execution des Ouvrages en Beton Armé", Comité Européen du Beton (CEB), Paris.
- CARVALHO, E. B.: "Análise Bidimensional de Estruturas de Concreto Armado, Considerando-se os Efeitos da Fissuração, Retração e Deformação Lenta", tese de mestrado, PUC/RJ, 1979.
- McHENRY, D.: "A New Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design", Proc. ASTM Vol. 43, 1943.
- ARUTYUNYAN, N. K.: "Some Problems in the Theory of Creep", Pergamon Press, Inc. New York, 1966.

- LIN, T. Y.: "Design of Prestressed Concrete Structures", New York, John Wiley & Sons, 1963.
- LIBBY, J.R.: "Modern Prestressed Concrete", New York, Litton Educational Publishing, Inc., 1971.
- DANTAS, G. V.: "Análise Bidimensional de Estruturas de Concreto Protendido em Regime de Serviço", tese de mestrado, PUC/RJ, 1980.
- DUMONT, N. A.: "Métodos Numéricos para a Solução de Problemas não Lineares de Estruturas de Concreto Armado", PUC/RJ, 1980 (não publicado).
- KANG, Y. J.: "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Frames", College of Engineering Office of Research Services, Univ. of California, Berkeley, Jan. 1977.
- ZIENKIEWICZ, O. C., VALLIAPAN, S., & KING, I. P.: "Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material", Géotechnique, março 1968.
- SOUZA, L. T.: "Análise Bidimensional de Estruturas de Concreto Armado com a Utilização de Técnicas Numéricas Avançadas", tese de Mestrado a ser publicada, PUC/RJ.