Canais de seção transversal mínima — uma análise. (1ª Parte)

* Ernesto da Silva Pitombeira

Este trabalho representa — dentro de sua simplicidade — uma modesta contribuição aos que trabalham com dimensionamento de canais para a condução de água, principalmente. Tenta mostrar que o dimensionamento de canais com seção molhada mínima é uma ilusão. O trabalho será apresentado em duas partes: Apresentação das expressões básicas e análise comparativa.

1 — Apresentação das expressões básicas

1.1. Introdução

Quando se projeta um canal, a idéia que se tem em mente é a de uma estrutura hidráulica capaz de atender ao fim a que se destina, com um mínimo de investimento, ou seja, com o menor custo possível. Para tanto, recorre-se então ao estudo de uma seção transversal que corresponda ao menor custo, certo de que este procedimento nos levará à uma estrutura economicamente viável, e tecnicamente correta.

É possível, no entanto, que estejamos sendo traídos pelas condições locais por onde a nossa estrutura irá desenvolver-se.

Portanto, é imperativo que não nos limitemos apenas a seção de canal mais econômica, mas levemos em consideração também, as condições de implantação do projeto elaborado.

1.2. Determinação dos elementos básicos

A maioria dos problemas de dimensionamento de canais consiste em, dispondo-se de Q (vazão), I (declividade), e C (coeficiente da fórmula de Chézy), determinar as dimensões da seção transversal, senão vejamos:

Q: vazão — Sempre é possível se saber a "priori", quanto de água se deve transportar para um determinado fim, inclusive se for o caso, com projeções de necessidades futuras.

I: declividade — A construção de um canal é levada a efeito em um local pré-determinado, logo sabemos de onde e para onde estamos transportando a água, se for o caso.

C: coeficiente da fórmulá de Chézy: Este coeficiente que é definido pelo material a ser empregado no revestimento das superfícies internas do canal, é conhecido pelas disponibilidades locais de materiais, e/ou também pelas condições econômicas do cliente-proprietário, vida útil do projeto etc; deste modo C será conhecido aprioristicamente.

Resta-nos então, determinar apenas os elementos geométricos da seção, que satisfazendo as condições de Q, I e C, nos forneça o menor valor de S — área da seção transversal ou área molhada do canal.

1.2.1. A expressão de Chézy

Pela equação da continuidade, Q = A.V; logo se para uma dada vazão Q, a área molhada A é mínima, então a velocidade V deve ser máxima.

Ora, a expressão de Chézy mostra que:

$$V = C\sqrt{\frac{S}{P} \cdot I}$$

onde:

P = perímetro molhado.

Os outros elementos já foram definidos.

Então S/P deve ser máximo, já que I e C foram definidos a "priori".

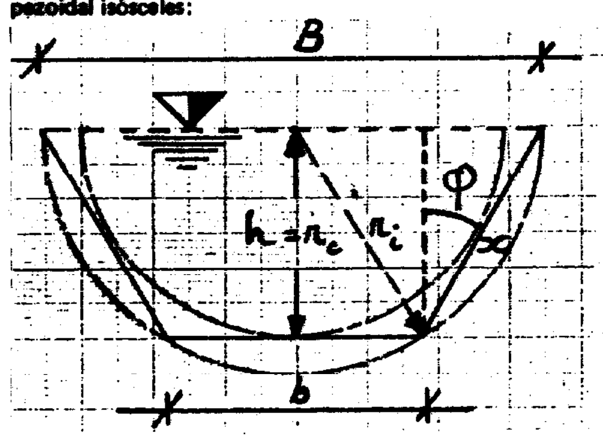
O problema se resume em minimizar P para um dado valor de A, e verificar qual a forma geométrica que nos proporcionaria o menor perímetro molhado, conseqüentemente, o que corresponderia a menor quantidade de revestimento.

1.2.2. O processo de minimização

O processo de minimização consiste em se determinar uma expressão para o perímetro mínimo para cada forma de canal.

Vamos apresentar a determinação detalhada apenas para um canal de forma trazoidal, já que estas expressões são bastante conhecidas na literatura específica.

Seja a figura abaixo, onde representamos uma seção trapezoidal isósceles:



Podemos determinar os seguintes elementos:

Perímetro Molhado: $P = b + \dfrac{2h}{\cos\varphi}$

Área Molhada: $S = \dfrac{b + B}{2} \cdot h$

---

* M. Sc. Prof. da UNIFOR.

Fazendo-se as devidas substituições, encontramos $\bar{P}$ como uma função de S, h e φ:

$$P = \frac{S}{h} - h.\text{tg}\,\varphi + \frac{2h}{\cos\varphi}$$

Neste ponto temos dois casos a considerar:

1.o — Se há liberdade para a escolha de φ, então temos duas variáveis a estudar a sua influência no problema — h e φ.

Assim, $P = P(\varphi, h)$, sendo portanto, S conhecido.

Vamos então, procurar o mínimo de P, em relação a φ e h. Derivando P em relação a φ, vem:

$$\frac{\partial P}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{S}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(h.\text{tg}\,\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2h}{\cos\varphi}\right)$$

ou

$$\frac{2h.\,\text{sen}\varphi - h}{\cos^2\varphi} = 0 \qquad \text{donde } \varphi = 30^\circ$$

Derivando em relação a h, vem:

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{S}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial h}(h.\text{tg}\varphi) - \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{2h}{\cos\varphi}\right)$$

ou

$$S + h^2.\text{tg}\,\varphi - \frac{2h^2}{\cos\varphi} = 0$$ donde levando em consideração que $\varphi = 30^\circ$, temos que:

$$h = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}\,.$$

circunscrito a outra semi-circunferência de raio $r_c = h$.

2.o — Algumas vezes, não é possível escolher $\varphi = 30^\circ$., pois tal ângulo já está definido pelo material disponível. Neste caso φ é dado, e temos que estudar a influência de uma única variável no problema — h.

Assim, $P = P(h)$, sendo portanto, S conhecido.

Vamos então, procurar o mínimo de P, em relação a h somente. Derivando P em relação a h, vem:

$$\frac{dP}{dh} = S.\frac{-1}{h^2} - \text{tg}\varphi + \frac{2}{\cos\varphi} \quad , \quad \frac{dP}{dh} = 0$$

ou

$$S = \frac{2 - \text{sen}\varphi}{\cos\varphi}\,h^2$$

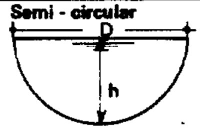
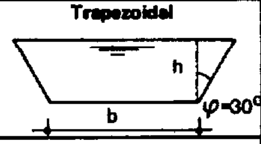
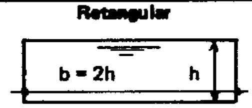
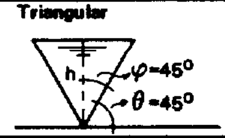
A largura do fundo será: $b = \dfrac{2h\,(1 - \text{sen}\varphi)}{\cos\varphi}$

O comprimento do talude será: $x = \dfrac{h}{\cos\varphi}$

Devemos observar que todos os elementos estão em função do ângulo.

1.3 — Comparação dos perímetros

Em igualdade de área, os perímetros e as alturas d'água se apresentam assim:

FORMA	Semi - circular 	Trapezoidal 	Retangular 	Triangular 
PERÍMETRO (P)	$\dfrac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{8}\,\sqrt{S}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,\sqrt{8}\,\sqrt{S}}{2}$	$\sqrt{8}\,\sqrt{S}$	$\sqrt{8}\,\sqrt{S}$
	$k_1\sqrt{8}\sqrt{S}$	$k_2\sqrt{8}\sqrt{S}$	$k_3\sqrt{8}\sqrt{S}$	$k_4\sqrt{8}\sqrt{S}$
(ALTURA) (h)	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sqrt{S}$	$\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{S}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{S}$	$\sqrt{S}$

A largura do fundo b, será: $b = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\;h.$

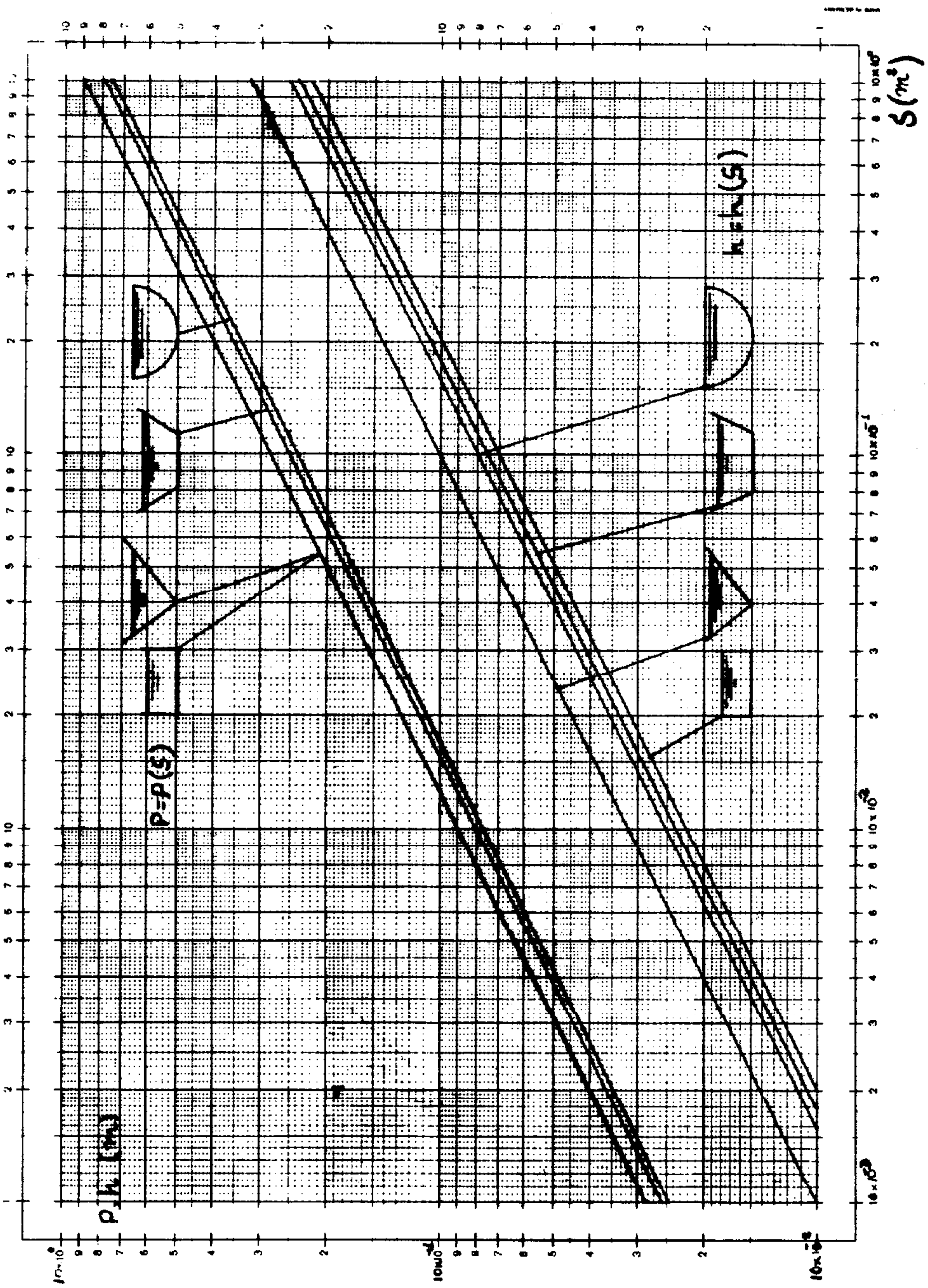
O comprimento do talude será: $x = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\;h.$

Comparando a expressão de b com x, vemos que o trapézio encontrado é um semi-hexágono regular, inscrito numa semi-circunferência de raio $r_i = \dfrac{B}{2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\;h$, e

Como se pode observar, para uma dada área molhada S, podemos dizer que:

$$P_{circular} < P_{trapezoidal} < P_{retangular} = P_{triangular}$$

A figura que se segue, dá a variação de P e h com S.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARAÚJO, G. M. de, *Curso de Hidráulica* – Capítulo II – Escoamento Permanente e Uniforme em Canais. Univ. Fed. Ce. Centro de Tecnologia. Fortaleza. 1984

2. HENDERSON, F.M., *Open Channel Flow,* 1.a Edição, New York, The Macmillan Company, 1966, 522p.

3. NEVES, E.T., *Curso de Hidráulica,* 2.a Edição, 2.a Impressão, Porto Alegre, Editora Globo, 1970.577p.

(A 2.a Parte será apresentada no próximo número da revista).