# Lajes Nervuradas

*** José Ricardo Brígido de Moura**

*Neste artigo são apresentadas e comentadas as prescrições da NB 1/78 referentes ao projeto estrutural de lajes nervuradas. É também mostrado um roteiro de cálculo para este tipo especial de laje.*

## I – INTRODUÇÃO

A medida em que há necessidade de se vencer vãos cada vez maiores, as lajes maciças vão se tornando anti-econômicas.

A explicação é simples:

a) os valores mais elevados das espessuras são exigidos quase que apenas para satisfazer às condições de limitação de flechas e não às condições de resistência;
b) isto conduz a um mau aproveitamento do concreto, já que a zona comprimida é pequena, além do peso próprio da estrutura que resulta exagerado.

* Engo. Civil, M. Sc – Prof. Assistente da UNIFOR.

Devem portanto serem buscadas soluções alternativas. A sub-divisão da Laje em painéis menores por vigamento nem sempre é possível, quer por imposições arquitetônicas quer por limitação de altura (pé-direito) ou por necessidade de passagem de dutos, etc. . .

Nestes casos o projetista de estruturas pode lançar mão de soluções alternativas para resolver de maneira satisfatória o problema vão x carga x eficiência da estrutura.

As lajes especiais podem ser

a) lajes nervuradas;
b) lajes cogumelo;
c) lajes mistas;
d) lajes protendidas.

## II – ESBELTEZ

Como ficou evidente da exposição anterior, para se escolher adequadamente o tipo da laje devemos conhecer qual a espessura h da laje exigida para o nosso problema.

a) pelo critério de dimensionamento.

Na prática, as lajes são calculadas com armaduras simples e sub-armadas.

Deduz-se, utilizando os critérios estabelecidos pela NB 1 que:

$$d_{min} = r\sqrt{\frac{Md}{b}}$$

onde r é um fator que depende do tipo do aço e do concreto empregados

$$r = \sqrt{\frac{1}{\mu\, fcd}}$$

| | | fck (Kgf/cm$^2$) | | |
|---|---|---|---|---|
| Aço | $\mu$ | 135 | 150 | 180 |
| CA-50A | 0,320 | 0,180 | 0,171 | 0,156 |
| CA-50B | 0,256 | 0,201 | 0,191 | 0,174 |
| CA-60B | 0,246 | 0,205 | 0,195 | 0,178 |

No caso de lajes $d_{min}(cm) = r\sqrt{M_d(Kgm)}$

b) pelo critério de esbeltez (item 4. 2. 3. 1C).

a) "As flechas medidas a partir do plano que contém os apoios, quando atuam todas as ações, não ultrapassarão 1/300 do vão teórico, exceto no caso de balanços para os quais não ultrapassarão 1/150 do seu comprimento.

b) O deslocamento causado pelas cargas acidentais não será superior a 1/500 do vão teórico e 1/250 do comprimento teórico dos balanços".
Para se calcular a flecha podemos seguir a orientação da NB 1 (ítem 4. 2. 3. 1).

"A determinação das deformações das peças fletidas deverá ser feita considerando apenas o Estádio II para barras, permitindo-se o Est. I para lajes, podendo proceder-se de acordo com os ítens seguintes A e B". Estes ítens recomendam:

A) Para as ações de curta duração (sobrecargas) adotar $E_c = E_0 \times 0{,}9$, onde

$$E_0 = 21.000\sqrt{fck + 35}$$

B) Para se levar em conta o efeito da deformação lenta nas ações de longa duração (Ex: peso próprio, pavimentação . . .) permite-se avaliar a flecha final multiplicando a inicial pela relação entre a curvatura final e inicial na secção de maior momento em valor absoluto, sendo a curvatura calculada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{|\epsilon c| + \epsilon s}{d},$$ fazendo $\epsilon_c$ final = $3\epsilon_c$ inicial.

$$K = \frac{\left(\frac{1}{r}\right)_{final}}{\left(\frac{1}{r}\right)_{inicial}}$$

K : fator de majoração da flecha inicial para ações de longa duração.

Mostra-se que na prática K pode ser tomado igual a 2.

Para facilitar o cálculo, ao invés de reduzir-se $E_c$ para atender ao caso de cargas de longa duração, basta duplicar o valor da carga permanente.

Além disto o ítem 5. 4. 2. 2 permite, para o cálculo de flechas, multiplicar o valor do sobrecarga por 0,7.

## III – FORMULÁRIO P/O CÁLCULO DE FLECHAS

As fórmulas a seguir são transcritas do artigo "Esbeltez das Lajes" (Rocha, A. M. – Revista Estrutura n.o 85, Dezembro/78).

$$f = \frac{K_f \cdot p \cdot \ell x^4}{D} \qquad D = \frac{Eh^3}{11{,}52}$$

$\ell x$: vão na direção mais engastada, ou o vão memenor para igualdade de engastamento dos apoios nas duas direções.

Kf : provém dos coeficientes de Marcus para cada caso de apoio.

CASO I: $Kf = \frac{Kx \cdot Vx}{72}$

CASOS 2 e 3: $Kf = Kx\,(1{,}064 + 2{,}815\,Vx) : 720$

CASOS 4: $Kf = Kx \cdot Vy : 360$

CASO 5: $Kf = \frac{Kx}{192} \times \frac{Vy}{1 + Vx}$

CASO 6: $Kf = \frac{Kx}{192} \times \frac{Vx}{1 + Vx^2}$

Sendo:

$$Vx = 1 - \frac{20\,Kx}{3m_x\,\lambda^2} \;;\; Vy = 1 - \frac{20\,(1 - Kx)\,\lambda^2}{3my}$$

$$\lambda = \frac{1y}{1x} \quad e$$

| CASO | Kx | my | my |
|---|---|---|---|
| 1 | $\lambda^4/(1+\lambda^4)$ | 8 | 8 |
| 2 | $5\lambda^4/(2+5\lambda^4)$ | 14,22 | 8 |
| 3 | $\lambda^4/(1+\lambda^4)$ | 14,22 | 14,22 |
| 4 | $5\lambda^4/(1+5\lambda^4)$ | 24 | 8 |
| 5 | $2\lambda^4/(1+2\lambda^4)$ | 24 | 14,22 |
| 6 | $\lambda^4/(1+\lambda^4)$ | 24 | 24 |

Conhecido Kf pode se determinar

$$f = Kf\,\frac{p\ell^4 x}{\frac{E\,h^3}{11{,}52}} \qquad \text{ou} \qquad f = K\,\frac{pl^4 x}{E\,h^3}$$

onde K pode ser tabelado (ou calculado) a partir de $\lambda$ e do caso de apoios.

A fórmula acima pode ser invertido para a determinação de h;

$$h = \sqrt[3]{\frac{kp\ell x^4}{Ef}}$$

Na aplicação das fórmulas acima notar que:

se f = a flecha acidental $\left(\leqslant \dfrac{\ell}{500}\right)$ então p = 0,7 q

se f = a flecha total $\left(\leqslant \dfrac{\ell}{300}\right)$ então p = 0,7 q + 2g

## EXEMPLO NUMÉRICO

Uma laje para estacionamento deverá ter dimensões $8{,}0 \times 8{,}0\ m^2$.

Sendo o concreto com fck = 150 $Kgf/cm^2$ e o aço CA-50B determinar a altura necessária considerando a laje maciça. Considerar a laje simplesmente apoiada nas bordas.

SOLUÇÃO: Avaliação das cargas

| | |
|---|---|
| — peso próprio: 0,15 x 2500 | = 375 |
| — revestimento | = 50 |
| — sobrecarga | = 300 |
| | 725 $kg/m^2$ |

a) Critérios de Resistência

$$\lambda = \frac{\ell y}{\ell x} = \frac{8{,}0}{8{,}0} = 1 \quad m_x = m_y = 27{,}43$$

$$Mx = My = \frac{qlx^2}{mx} = \frac{725 \times (8{,}0)^2}{27{,}43} = 1692$$

$$d' = 1{,}25 + 1{,}0 = 2{,}25$$

$$d \geqslant 0{,}191\sqrt{1{,}4 \times 1692} = 9{,}29, \quad h \geqslant 9{,}29 + 2{,}25 = 11{,}54$$

h = 12 cm

b) Critério de esbeltez

$$\dot{E} = 0{,}9 \times 21.000\sqrt{150 + 35} = 257068\ Kg/cm^2$$

$$E = 2{,}57 \times 10^6\ tm^{-2}$$

flecha "acidental"

$$\bar{f}_a = \frac{800}{500} = 1{,}6cm\ ;\ P = 0{,}7 \times 300 = 210\ Kg/cm^2$$

$$\bar{f}a = 1{,}6 \times 10^{-2}m\ ;\ p = 2{,}1 \times 10^{-1}\ tm^{-2}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow 100K = 4{,}67$$

$$h_{min} = \sqrt[3]{\frac{4{,}67 \times 10^{-2} \times 2{,}1 \times 10^{-1} \times (8{,}0)^4}{2{,}57 \times 10^6 \times 1{,}6 \times 10^{-2}} \times 100}$$

$h_{min}$ = 10 cm (acid.)

flecha total

$$ft = \frac{800}{300} = 2{,}67\ cm = 2{,}67 \times 10^{-2}m$$

$$p = 2 \times 475 + 0{,}7 \times 300 = 1060 = 1{,}06\ tm^{-2}$$

$$h_{min} = \sqrt[3]{\frac{4{,}67 \times 1{,}06 \times (8{,}0)^4}{100 \times 2{,}57 \times 10^6 \times 2{,}67 \times 10^{-2}}} = 0{,}144m$$

$h_{min}$ = 15 cm

## 4 — LAJES NERVURADAS

*4.1. DEFINIÇÃO:* "São consideradas lajes nervuradas aquelas cuja zona de tração é constituída por nervuras entre as quais podem ser colocadas materiais inertes, de modo a tornar plana a superfície externa" (ítem 3.3.2.10 — NB.I).

As nervuras solidarizam-se entre si pela laje (mesa). Os materiais inertes podem servir de fôrma para as nervuras e podem ser:

a) tijolos de argila ou cerâmicos;
b) blocos de concreto leve (Ex: SICAL);
c) formas espaciais.

O cálculo pode ser feito como placa, utilizando-se inclusive métodos simplificados se forem observados as prescrições do ítem 6.1.1.3.

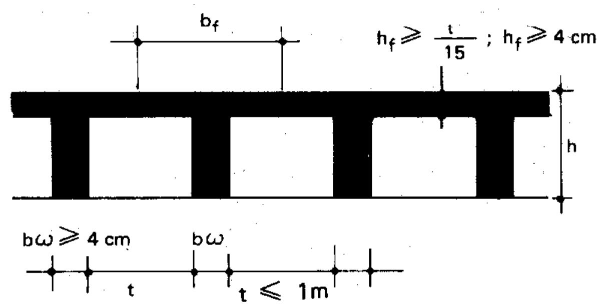


FIGURA 1

a) a distância livre entre as nervuras não deve ultrapassar 100 cm;
b) a espessura das nervuras não deve ser inferior a 4cm e da mesa não deve ser menor que 4cm nem 1/15 da distância livre entre as nervuras;
c) o apoio das lajes deve ser feito ao longo de uma nervura;
d) nas lajes armadas numa só direção serão necessários nervuras transversais sempre que haja cargas concentradas a distribuir ou quando o vão teórico for superior a 4m, exigindo-se 2 nervuras no mínimo, se este vão ultrapassar 6m.
e) nas nervuras com largura inferior a 8cm não é permitido colocar armadura de compressão no lado oposto a mesa.

## OUTRAS PRESCRIÇÕES

3.2.2.10 — A resistência da mesa a flexão deverá ser verificada que a distância livre entre as nervuras superar 50cm ou houver carga concentrada no painel entre as nervuras.

3.2.2.10 – As nervuras deverão ser verificadas a cisalhamento.

– como vigas, se a distância livre entre elas for superior a 50cm;
– como laje, em caso contrário.

### *4.2 – MÉTODO DE CÁLCULO*

Obedecidos os requisitos citados anteriormente o elemento estrutural "laje nervurada" pode ser calculada como placa em regime elástico, inclusive por processos simplificados.

Sugere-se aqui a teoria de Marcus para o cálculo dos esforços e o processo das áreas de influência para o cálculo das reações de apoio.

ATENÇÃO: A sugestão acima não será válida para os casos de cargas concentradas ou parcialmente distribuídas importantes, devendo-se aí recorrer-se a processos mais precisos para determinação dos esforços solicitantes.

### *4.3 – ALTURA, APOIO, CONDIÇÕES DE CONTORNO*

Para o pré-dimensionamento da altura pode-se recorrer ao ítem 4.2.3.1.C da NB-1.

$d \geqslant \dfrac{\ell}{\psi_2\ \psi_3}$ onde $\psi_2$ e $\psi_3$ dependem das condições de contorno e do tipo de armadura empregadas.

Um processo prático consiste no cálculo de $h_{min}$ como tivéssemos laja maciça e na majoração deste valor para $h = 1{,}5\ h_{min}$.

Quanto às condições de contorno poderão ser utilizados os tipos clássicos de Marcus.

Junto aos apoios intermediários, admitindo-se a continuidade, tem-se momentos negativos (tração do lado da mesa) e a secção resistente é apenas a da nervura.

Nos casos em que a secção da nervura seja insuficiente para a armadura simples pode-se utilizar armadura dupla desde que $b\omega \geqslant$ 8cm. Além da armadura dupla podem ser utilizados outros recursos.

a) aumentarem-se as dimensões da nervura (podendo inclusive este aumento ser dado apenas na região próxima aos apoios);
b) eliminação da continuidade;
c) utilização de mesa invertida na região dos apoios (cobrindo o DMF na zona dos momentos negativos).

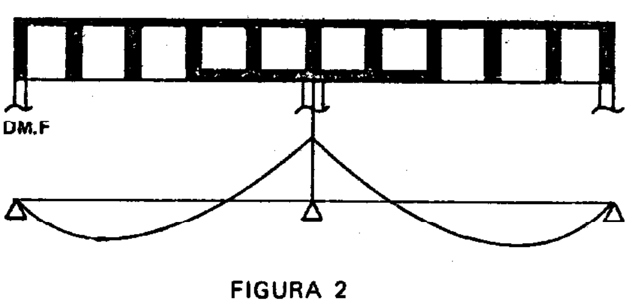


FIGURA 2

### *4.3 – DIMENSIONAMENTO*

Calculados os esforços solicitantes na laje Mx, My, Xx, Xy, Qx e Qy, os esforços correspondentes na nervura são obtidos multiplicando-se esses valores por bf = a + bw em cada direção.

A partir daí são calculadas as armaduras de flexão e são feitas as verificações de cisalhamento da mesa e da nervura, culminando com o detalhamento.

### EXEMPLO NUMÉRICO

Calcular a laje nervurada 8,0 x 10,0 $m^2$ utilizando como material inerte blocos de concreto leve ( $\gamma$ = 300kg/$m^3$).

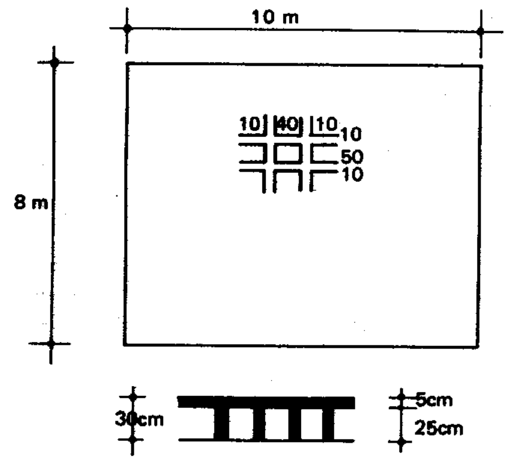


FIGURA 3

SOLUÇÃO:

a.1) Avaliação da altura: $d \geqslant \dfrac{\ell}{\psi_2\ \psi_3}$ (ítem 4.2.3.1.C)

Para lajes nervuradas com $\sigma_s$ = 4348 kg/$cm^2$ (CA - 50)

$\psi_3 = 17$

$\psi_2$ é obtido por interpolação: $\dfrac{\ell_x}{\ell_y} = \dfrac{10}{9} = 1{,}2$

$$\psi_3 = 1{,}5 - \frac{0{,}4}{1} \times 0{,}25 = 1{,}4$$

$d \geqslant \dfrac{800}{17 \times 1{,}4} = 33{,}6$ ; adotaremos altura total de 30 cm.

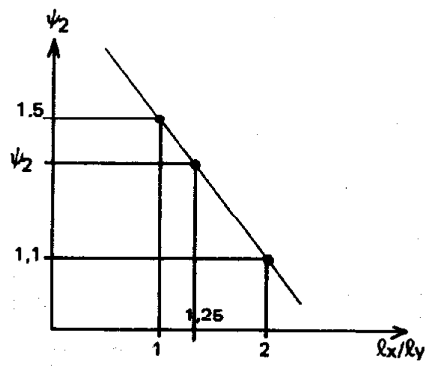


FIGURA 4

a.2) Cargas: Para uma área 0,50 x 0,60 = 0,30$m^2$ tem-se a seguinte carga.

– blocos de concreto:
0,40 x 0,50 x 0,25 x 0,30 = 0,015 t

— nervuras de concreto
(0,50 + 0,50) x 0,10 x 0, 25 x 2,5 = 0,0625

— total = 0,0775 t

— carga por $m^2$ = $\frac{0,0775}{0,30}$ = 0,258t/$m^2$

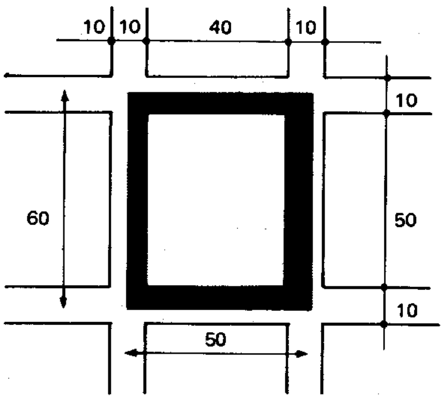


FIGURA 5

Carga na laje: tijolo + nervura: 0,258 t/$m^2$
peso próprio: 0,05 x 2,5 = 0,125 t/$m^2$
sobrecarga: = 0,200 t/$m^2$
revestimento: = 0,100 t/$m^2$

q = 0,683 t/$m^2$

a.3) Esforços: $\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x} = \frac{10}{8} = 1,25$

Kx = 0,709
mx = 18,14
my = 28,34

$q l x^2 = 0,683 \times (8)^2 = 43,712$

$Mx = \frac{43,712}{18,14} = 2,41$ tm/m

na nervura: $M_x^* = 2,41\ (0,40 + 0,10) = 1,205$ tm

$My = \frac{43,712}{28,34} = 1,54$ tm/m

na nervura $M_y^* = 1,54\ (0,50 + 0,10) = 0,925$ tm
Esforços cortantes: $q_x = k_x \cdot q = 0,709 \times 0,683$
$q_x = 0,484$ ; $q_y = (1 - 0,709) \times 0,683$
$q_y = 0,199$

$Qx = \frac{0,484 \times 8,0}{2} = 1,936$ t/m, na nervura
$Q_x^* = 0,968$ t

$Qy = \frac{0,199 \times 10}{2} = 0,995$ t/m, na nervura
$Q_y^* = 0,597$ t

b) Dimensionamento

b.1) A flexão: Como o espaçamento entre nervuras não ultrapassa 50cm em nenhuma das direções e armaduras poderá ser calculada como se fosse uma laje maciça de altura útil d = 30 – 2,5 = 27,5cm obtendo-se a armadura As em $cm^2$/m.

Outro processo válido será o cálculo como viga T. Este processo também será mostrado aqui por ser mais geral (recomendado para espaçamento de nervuras superior a 50cm).

ARMADURA NA DIREÇÃO X

M = 2,41 tm/m

$d_o = 27,5$cm

$r_o = \frac{27,5}{\sqrt{2410}} = 0,5602$ $\quad \alpha_o = 28,91$ (Tabela 20, Rocha, A. M. Vol. 1)

$A_s = \frac{2410}{28,91 \times 27,5} = 3,03\ cm^2/m$

$A_s^* = 3,03 \times 0,50 = 1,515\ cm^2 \rightarrow 2\phi\ 10,0$

Na direção y o procedimento será análogo. No exemplo presente repete-se à armadura da direção x $A_s^*(y) = 2\phi\ 10$

Como viga T — utilizando-se aqui fórmulas práticas em que se despreza a compressão na nervura (Rocha, A. M., vol. 1 pg. 287).

— Determina-se do = $\frac{Md}{0,85\ fcd \cdot bf \cdot hf} + \frac{hf}{2}$

do: é a altura necessária e suficiente para a peça normalmente armada considerando toda a mesa trabalhando uniformente.

Se d = do, $A_s = \frac{Md}{(do - \frac{hf}{2})\ fyd}$

Se d > do então y < hf e o cálculo pode ser feito como secção retangular com largura igual a bf (isto acontece na grande maioria dos casos na prática).

No caso deste exemplo.

$do = \frac{1,4 \times 1205}{0,85 \times \frac{150}{1,4} \times 50 \times 5} + \frac{5}{2} \cong 10$ cm

Como d > do então teríamos cálculo como secção retangular 50 x 30 (na direção x) o que reproduzirá o mesmo achado no cálculo como laje maciça.

c) VERIFICAÇÃO DA FLEXA

$\bar{Y} = \frac{50 \times 5 \times 27,5 + 10 \times 25 \times 12,5}{250 + 250} = 20$cm

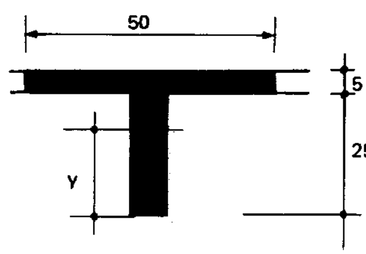


FIGURA 6

$$I_x = \frac{50 \times 5^3}{12} + 250x(7,5)^2 + \frac{10x(25)^3}{12} + 250x(20-12,5)^2$$

$$I_x = 41666,7\ cm^4$$

$$f = K\frac{pl\ x^3}{Eh^3}$$ , inercia equivalente $\frac{b_n\ h_n^3}{12} = I_n$

$$hn^3 = \frac{12 \times In}{bn} = \frac{12 \times 41666,7}{50} = 10.000\ cm^3$$

$$\lambda = \frac{10}{8} = 1,25 \rightarrow 100k = 7,05$$

$$h_n^3 = 10^4 cm^3 = 10^{-2} m^3$$

c.1) FLECHA ACIDENTAL $fac,max = \frac{1}{500} = \frac{800}{500} =$

$= 1,6\ cm$

$p = 0,7 \times 200 = 140 = 0,14\ t/m^2$

$$f = \frac{7,05 \times 0,14 \times (8)^4}{2,57 \times 10^6 \times 10^{-2}} = 0,15cm\ OK;$$

c.2) FLECHA TOTAL $f_{tot,max} = \frac{1}{300} = 2,66cm$

$p = 0,7 \times 200 + 2 \times 483 = 1,106\ t/m^2$

$$f = \frac{7,0 \times 1,106x(8)^4}{2,57 \times 10^4} = 1,24cm\ OK;$$

d) VERIFICAÇÃO DO CISALHAMENTO COMO LAJE

A norma dispensa o uso de armadura transversal (estribos e ferros dobrados) em laje se a tensão rominal

$\zeta_{wd} = \frac{Qd}{bw\ .\ d}$ não superar o valor $\zeta_{wu_1} = \psi_4 \sqrt{fck}$

$\psi_4 = 2,0\sqrt[4]{\rho_1}$ se $h \leqslant 15cm$

$\psi_4 = 1,4\sqrt[4]{\rho_1}$ se $h \geqslant 60cm$

Com interpolação linear se $15 < h < 60cm$. No exemplo: $A_1\phi\ (10,0) = 0,80cm^2$

$$\rho_1 = \frac{2 \times 0,8}{500} = 0,0032$$

$h = 15$ $\psi_4 = 0,48$

$h = 60$ $\psi_4 = 0,33$

Para h = 30 e interpolando linearmente $\psi_4 = 0,43$

$\zeta_{wu1} = 0,43\sqrt{150} = 5,3\ kg/cm^2$

$\zeta_{wd}$ (na direção x) $= \frac{1,4 \times 968}{10 \times 27,5} = 4,93\ kg/cm^2$

e) ANCORAGEM NO APOIO

A força $R_{st}$ de tração no apoio deve ser ancorada no apoio pode ser calculada por $R_{st} = 0,5\ Vd$ (ítem 4. 1. 6. 2. A da NB - 1), onde $V_d$ é o valor da força cortante no apoio.

daí $Ascal = \frac{R_{st}}{f_{yd}} = \frac{0,5 \times 1,4 \times 968}{4348} = 0,156cm^2$

Portanto, dever-se a ter no apoio um comprimento

$l_{b\,l} = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{\zeta_{bu}}$, minorado pelo fator $\frac{A_{scal}}{A_{se}}$ ( ítem 4.1.6.2B).

$lb_{rec} = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{\zeta_{bu}} \cdot \frac{A_{scal}}{A_{se}}$ , $A_{se} = 2 \times 0,8 = 1,6\ cm^2$

No caso de CA. 50 $\zeta_{bu} = 0,9\sqrt[3]{fc^2d}$

$f_{ck} = 150, \zeta_{bu} = 0,9\sqrt[3]{(\frac{150}{1,5})^2} = 20,30kg/cm^2$

$l_b = \frac{1cm \times 4348}{4 \times 20,30} = 54\ cm$

$lb_{nec} = 54\ \frac{0,156}{1,6} \cong 5cm$

Detalhamento (indicações genéricas)

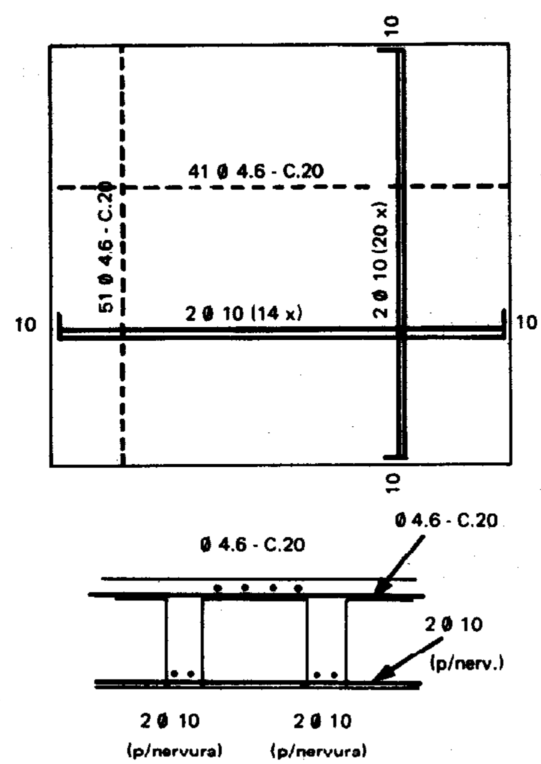


FIGURA 7

OBS: Na mesa $A_s = 0,9\ cm^2/m$ , $e = \frac{17}{0,9} \cong 20cm$