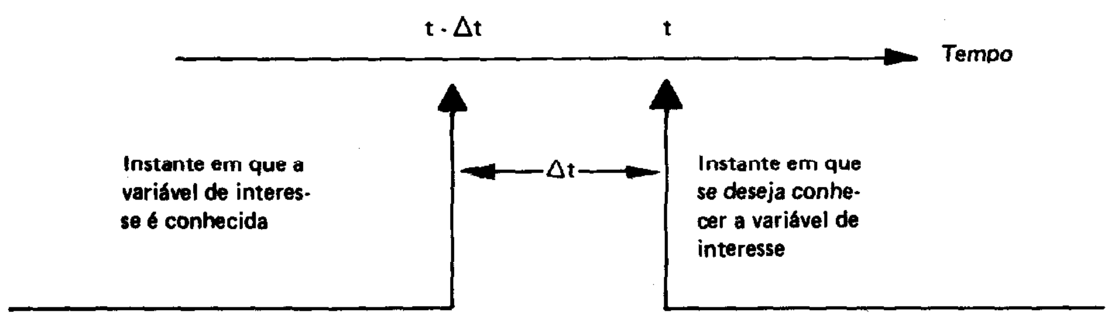
MODELAGEM DIGITAL DOS COMPONENTES DOS SISTEMAS ELETRICOS DE POTÊNCIA

*** Roberto Garrido**

Neste artigo são apresentadas as demonstrações das modelagens dos componentes elétricos, tais como indutores, capacitores e resistores para utilização em estudos de sistemas elétricos de potência em regime transitório através de computadores digitais.

1. INTRODUÇÃO

Para efetuar a modelagem digital dos componentes elétricos, temos que considerar as variáveis de interesse conhecidas no instante "t – Δt" e procurar o comportamento das mesmas durante um intervalo de tempo "Δt", para então obtê-las em um novo instante "t". A figura abaixo ilustra:

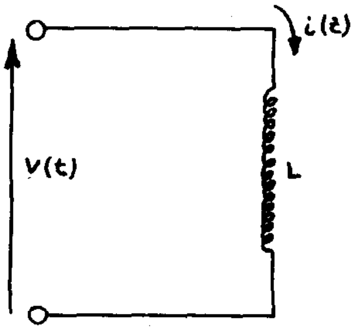


* Engo. Eletricista da COELCE e Prof. do Depto. Engenharia Elétrica da UNIFOR.

A escolha do intervalo de tempo "Δt" é feita de forma que as equações diferenciais representativas do comportamento dos componentes do sistema elétrico passam ser discretizadas por diferenças simples. Por exemplo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

2. REPRESENTAÇÃO DIGITAL DE INDUTORES



$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt$$

Conforme considerações do item 1, sabemos o comportamento das variáveis de interesse no instante "$t - \Delta t$" e desejamos conhecer seu novo comportamento após um intervalo de tempo "Δt" devidamente escolhido.

Sejam as funções v(t) e i(t) conforme representação gráfica abaixo:

GRÁFICO 1

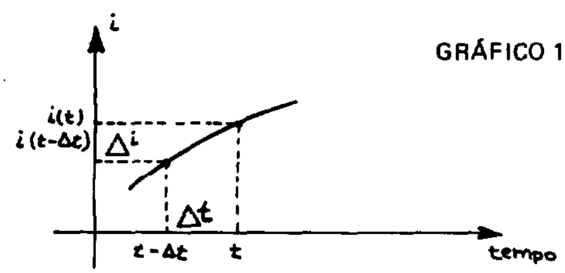
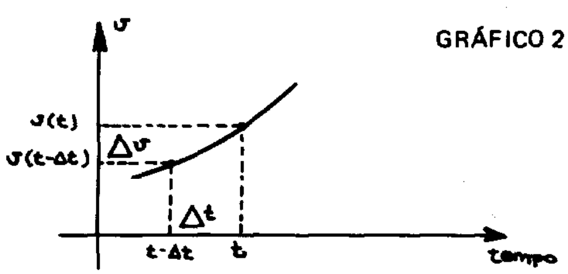


GRÁFICO 2



Considerando o GRÁFICO 1, conhecemos o valor da função "i" no ponto "$t - \Delta t$", para o ponto "t" temos:

$$i(t) = i(t - \Delta t) + \Delta i \qquad \text{Eq. 1}$$

$$\Delta i = \frac{1}{L}\int_{v(t-\Delta t)}^{v(t)} v(t)\,dt \qquad \text{Eq. 2}$$

Como o valor do intervalo de tempo "Δt" é muito pequeno permitindo que a função em questão seja discretizada, podemos aproximar a função v(t) no intervalo "Δt" por uma reta que passa pelos pontos $[\,(t - \Delta t), v(t - \Delta t)\,]$ e $[\,t, v(t)\,]$. Logo Δi é a área do paralelogramo formado pela união dos pontos:
$[\,(t - \Delta t), o\,]$; $[\,t, o\,]$; $[\,(t - \Delta t), v(t - \Delta t)\,]$; $[\,t, v(t)\,]$ multiplicada pela constante 1/L.

Logo temos:

$$\Delta i = \frac{1}{L}\left[\,(v(t) + v(t - \Delta t) \times \frac{\Delta t}{2}\,\right]$$

$$\Delta i = \left[\frac{v(t - \Delta t)}{2L} \times \Delta t + \frac{v(t)}{2L} \times \Delta t\right]$$

$$i(t) = i(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L}\,v(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L}\,v(t)$$

Sejam: $R = \dfrac{2L}{\Delta t}$

$$I = i(t - \Delta t) + \frac{v(t - \Delta t)}{R} \rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R} + I \qquad \text{Eq. 3}$$

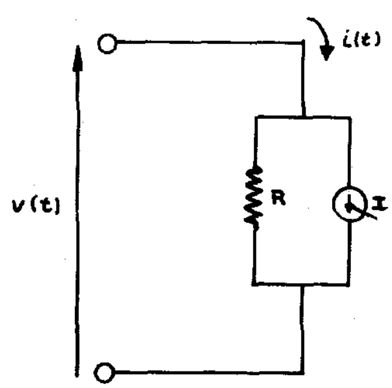
Observamos na equação 3 dois pontos bastante importantes:

1) R é uma resistência fictícia de valor constante, independente do tempo e com dimensões em OHMS:

$$\Delta v = L\,\frac{\Delta i}{\Delta t} \therefore \frac{L}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta i} = \Delta R$$

2) I pode ser visto como uma fonte de corrente conhecida porém variável no tempo que representa a história passada da variável de interesse.

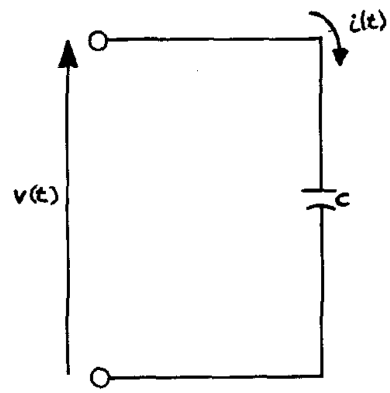
Um indutor é representado por um circuito equivalente conforme abaixo:



$$R = \frac{2L}{\Delta t}$$

$$I(t - \Delta t) = i(t - \Delta t) + \frac{v(t - \Delta t)}{R}$$

3. REPRESENTAÇÃO DIGITAL DO CAPACITOR



$$i(t) = C\,\frac{dv\,(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\,(t)\,dt$$

Considerando o GRÁFICO 2, conhecemos o valor da função "v" no ponto "t – Δt", e para o ponto "t" temos:

$$v(t) = v(t - \Delta t) + \Delta v \qquad \text{Eq. 4}$$

$$\Delta v = \frac{1}{C}\int_{i\,(t-\Delta t)}^{i(t)} i\,(t)\,dt \qquad \text{Eq. 5}$$

Como no caso anterior para um intervalo de tempo Δt a função pode ser discretizada podendo aproximar a função i (t) por uma reta que passa pelos pontos
[(t – Δt), o] ; [t, o] ; [(t – Δt), i (t – Δt)] e [t, i (t)] multiplicada pela constante 1/C.

Logo temos:

$$\Delta v = \frac{1}{C}\left[\,(i\,(t) + i\,(t-\Delta t))\times\frac{\Delta t}{2}\right]$$

$$\Delta v = \left[\frac{i(t-\Delta t)}{2C}\times\Delta t + \frac{i\,(t)}{2C}\times\Delta t\right]$$

$$v(t) = v(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2C}\,i\,(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2C}\,i(t)$$

Tirando o valor de i (t), temos:

$$i(t) = \frac{2C}{\Delta t}\,v(t) - \frac{2C}{\Delta t}\,v(t-\Delta t) - i\,(t-\Delta t)$$

Sejam: $R = \Delta t/2C$

$$I = -\left[\,i\,(t-\Delta t) + \frac{v(t-\Delta t)}{R}\right] \rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R} + I \qquad \text{Eq. 4}$$

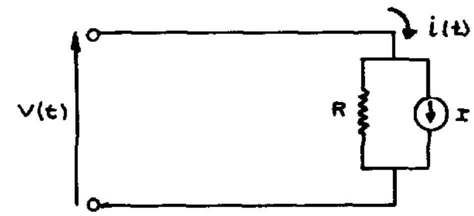
Observamos na equação 4 o mesmo que observamos na equação 3:

1) R é uma resistência fictícia de valor constante, independente do tempo e com dimensões em OHMS:

$$\Delta i = C\,\frac{\Delta v}{\Delta t} \;\therefore\; \frac{\Delta t}{C} = \frac{\Delta v}{\Delta i} = R$$

2) I pode ser visto como uma fonte de corrente conhecida porém variável no tempo que representa a história passada da variável de interesse.

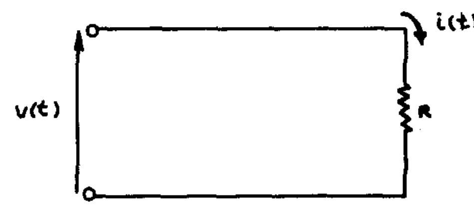
Um capacitor é representado por um circuito equivalente conforme abaixo:



$R = \Delta t/2C$

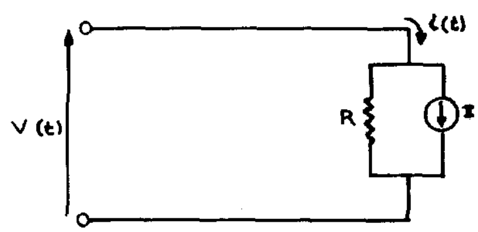
$$I\,(t-\Delta t) = -\left[\,i\,(t-\Delta t) + \frac{v\,(t-\Delta t)}{R}\right]$$

4. REPRESENTAÇÃO DIGITAL DO RESISTOR



$v\,(t) = R\,i\,(t)$

Neste caso como a função é linear ao longo do tempo o resistor é representado por um circuito equivalente mostrado abaixo:

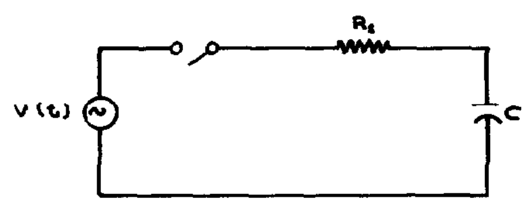


I = O

R = R

5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para ficar mais claro a técnica apresentada, e mostrar que o processo de resolução é interativo exemplificamos com a energização de um banco de capacitores:



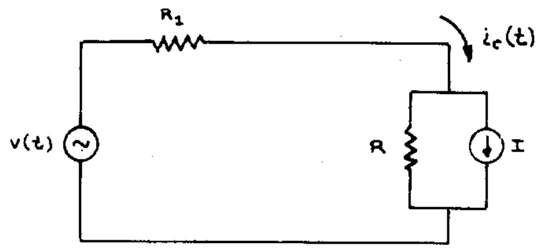
$$v(t) = \frac{13800}{\sqrt{3}}\,\text{Cos}\,377t$$

$R1 = 1{,}5\,\Omega$

$C = 4 \times 10^{-5}F$

$\Delta t = 10^{-7}seg$

Circuito equivalente



$$R = \frac{\Delta t}{2C}$$

$$I(t - \Delta t) = -\left[\, ic\,(t - \Delta t) + \frac{v_C\,(t - \Delta t)}{R} \right]$$

$$i_C\,(t) = \frac{v_C\,(t)}{R} + I\,(t - \Delta t)$$

$$v_C\,(t) = v(t) - i_C\,(t) \times R1$$

$$v_C\,(t) = v\,(t) - \left[\frac{v_C\,(t)}{R} + I\,(t - \Delta t) \right] R1$$

$$v_C\,(t) = v\,(t) - \left[\frac{R1}{R}\, v_C\,(t) + R1 \times I\,(t - \Delta t) \right]$$

$$v_C\,(t) + \frac{R1}{R}\, v_C\,(t) = v\,(t) + R1 \times I\,(t - \Delta t)$$

$$v_C\,(t) = \frac{v(t)}{1 + \frac{R1}{R}} + I\,(t - \Delta t) \times \frac{R1}{1 + \frac{R1}{R}}$$

Logo:

$$v_C\,(t) = \frac{R}{R + R1}\, v\,(t) - \frac{R1 \times R}{R1 + R}\, I\,(t - \Delta t)$$

1 — Para t = 0

$v_C\,(0)$

$i_C\,(0) = 0$

2 — Para t = Δt

$$I\,(\Delta t - \Delta t) = -\left[\, i_C(\Delta t - \Delta t) + \frac{v_C\,(\Delta t - \Delta t)}{R} \right]$$

$$I\,(0) = -\left[\, i_C\,(0) + \frac{v_C\,(0)}{R} \right] = 0$$

$$i_C\,(\Delta t) = \frac{v_C\,(\Delta t)}{R} + I(0) \therefore i_C\,(\Delta t) = \frac{v_C\,(\Delta t)}{R}$$

$$v_C\,(\Delta t) = \frac{R}{R + R1}\, v(\Delta t)$$

$$R = \frac{\Delta t}{2C} = \frac{10^{-7}}{2 \times 4 \times 10^{-5}} = 1{,}25 \times 10^{-2}\,\Omega$$

$$v\,(\Delta t) = 7960 \cos 377 \times 10^{-7} = 7960 \text{ v}$$

$$v_C\,(\Delta t) = \frac{1{,}25 \times 10^{-2}}{1{,}5 + 1{,}25 \times 10^{-2}} \times 7960 = 65{,}785\text{v}$$

$$i_C\,(\Delta t) = \frac{65{,}785}{1{,}25 \times 10^{-2}} = 5{,}2628 \times 10^3 \text{ A}$$

$$\text{Para } t = \Delta t \begin{cases} v_C\,(\Delta t) = 65{,}785\text{V} \\ i_C\,(\Delta t) = 5{,}2628\text{KA} \end{cases}$$

3 — Para t = $2\Delta t$

$$I\,(\Delta t) = -\left[\, i_C\,(\Delta t) + \frac{v_C\,(\Delta t)}{R} \right]$$

$$I\,(\Delta t) = -\left[\, 5{,}2628 \times 10^3 + \frac{65{,}785}{1{,}25 \times 10^{-2}} \right] =$$

$$= -\,10{,}5256 \times 10^3 \text{ A}$$

$$v_C\,(2\Delta t) = \frac{1{,}25 \times 10^{-2}}{1{,}5 + 1{,}25 \times 10^{-2}} \times 7960 \cos 377 \times 2 \times 10^{-7} +$$

$$+ \frac{1{,}5 \times 1{,}25 \times 10^{-2}}{1{,}5 + 1{,}25 \times 10^{-2}} \times$$

$$\times\, 10{,}5266 \times 10^3 = 65{,}785 + 130{,}4826 = 196{,}2676\text{v}$$

$$i_C\,(2\Delta t) = \frac{196{,}2676}{1{,}25 \times 10^{-2}} - 10{,}5256 \times 10^3 = 5{,}1758 \times 10^3 \text{ A}$$

$$\text{Para } t = 2\Delta t \begin{cases} v_C\,(2\,\Delta t) = 196{,}268 \text{ V} \\ i_C\,(2\,\Delta t) = 5{,}1758 \text{ KA} \end{cases}$$

O processo de cálculo continua interativamente de Δt em Δt até o limite de tempo pré-estabelecido.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

— H. W. DOMMEL, *"Digital computer solutin of electromagnetic transients in single and multiphase networks".*

— H. W. DOMMEL, *"Nonlinear andtime-varying elements in digital simmulation of electromagnetic transientes"*