

# MODELAGEM DA CURVA DE SATURAÇÃO DE TC'S PARA PROTEÇÃO — MÉTODO DAS SPLINES CÚBICAS

\* Ricardo Silva Thé Pontes  
\*\* Cássio Tessandro Castro Andrade  
\*\*\* Valmir Mendes de Oliveira  
\*\*\*\* Otacilio da Mota Almeida

*Este trabalho destina-se a apresentar um método de modelagem computacional para a curva de saturação magnética, a partir de valores de tensão e corrente medidos, com grande precisão e um mínimo de pontos ensaiados.*

## 1. INTRODUÇÃO

A grande utilização de materiais ferromagnéticos em equipamentos elétricos tais como: Transformadores, Máquinas Elétricas, Reatores, TP'S, TC'S e outros, nos levam a um estudo mais aprofundado de suas características de não linearidade e saturação. Estas características são evidenciadas por sua curva de saturação.

Este trabalho destina-se a apresentar um método de modelagem computacional da curva de saturação magnética, a partir de valores de tensão e corrente medidos; com grande precisão e com mínimo de pontos (V, I) ensaiados.

O referido método baseia-se na interpolação de pontos por splines cúbica da qual obteve-se resultados bem mais precisos que os obtidos por interpolações clássicas tais como: Polinomial de Lagrange, dos mínimos quadrados, função racional, polinomial de Hermit [ 1, 2, 3 ] .

O trabalho também apresenta uma comprovação laboratorial para a curva de saturação de TC'S de proteção. Mostrando resultados da comparação entre pontos ensaiados e calculados.

## 2. SIMBOLOGIA UTILIZADA

$f(x)$  - função  $f$  da variável  $x$   
 $f'(x)$  - derivada primeira de  $f(x)$   
 $f''(x)$  - derivada segunda de  $f(x)$

$S(x_i)$  - representação da função spline que interpola  $f(x)$  em um intervalo  $[a, b]$  com  $i$  variando de 0 a  $n$ .

$S'(x_i)$  - derivada primeira da spline

$S''(x_i)$  - derivada segunda da spline

$M_i$  - representação da derivada segunda da função spline no ponto  $X_i$ .

$\delta_i, \lambda_i, \mu_i, d_i$  - parâmetros de definição das famílias de splines

$V$  - tensão

$I$  - Corrente

$[A]$  - Matriz formada pelos parâmetros  $\mu_i, \lambda_i, \delta_i$ .

$[M]$  - Vetor das derivadas Segundas das splines.

$[D]$  - Vetor formado pelos parâmetros  $d_i$ .

## 3. AS SPLINES CÚBICAS [ 1, 2, 3, 6 ]

É fato observado que muitas vezes se retrata mais fielmente o comportamento de uma função através da união de seus diversos pontos tabelados por simples segmentos de retas do que por uma interpolação clássica [ 3, 4 ]. A união por segmentos de retas dos pontos de uma tabela para a representação de uma função  $f(x)$ , no entanto, é imprecisa e de certo modo, grosseira. Foi pensando dessa maneira que em 1946 SCHOEMBERG <sup>(1)</sup> propôs passar funções cúbicas entre os pontos de uma tabela, mantendo as derivadas primeiras e segundas contínuas de uma cúbica para outra e ao conjunto de cúbica que representam o comportamento da função  $f(x)$ , deu-se o nome de SPLINES CÚBICAS.

\* Graduado em Engenharia Elétrica - UFC, 1979, MSc em Engenharia Elétrica - UnB, Professor e Chefe do Departamento de Engenharia Elétrica da UFC. Tutor do PET (Programa Especial de Treinamento da CAPES).

\*\* Aluno do Curso de Engenharia Elétrica da UFC, participante do PET (Programa Especial de Treinamento da CAPES).

\*\*\* Aluno do Curso de Engenharia Elétrica da UFC, participante do PET (Programa Especial de Treinamento da CAPES).

\*\*\*\* Aluno do Curso de Engenharia Elétrica da UFC, participante do PET (Programa Especial de Treinamento da CAPES).

**3.1 - Desenvolvimento Matemático.**

Considere o conjunto de funções  $Sp(x_n)$  tal que se  $S(x) \in Sp(x)$  então:

A.  $S(x) \in C^2[a, b]$

$S'(x)$  e  $S''(x)$  são contínuas em  $[a, b]$

B.  $S(x_i) = f(x_i) = f_i \quad (\phi \leq i \leq n)$

$S(x)$  interpola  $f(x)$  em  $[a, b]$

C.  $S(x)$  é um polinômio do 3º grau em cada intervalo

$[x_i, x_{i+1}] \quad (\phi \leq i \leq n)$

Nota-se de imediato a dependência da família de splines  $Sp(x_n)$  da função  $f(x)$  que está sendo interpolada e a preocupação de manter-se as derivadas primeiras e segundas contínuas. Ainda as cúbicas  $S(x)$  são contínuas em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .

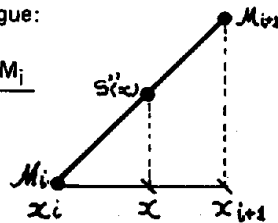
Para construir a família de splines satisfazendo as condições anteriores é conveniente introduzir a seguinte notação.

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 1, n$$

$$M_i = S''(x_i)$$

Como  $S(x)$  é uma cúbica  $S'(x)$  é quadrática e  $S''(x)$  é linear e podemos escrever como segue:

$$\frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{S''(x) - M_i}{x - x_i}$$



Segue-se então que:

$$S(x) = M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{h_i} + M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h_i} + S''(x) \quad (1)$$

Para encontrar  $S(x)$  integra-se essa equação duas vezes

$$S(x) = \frac{M_i(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(x - x_i)^3}{6h_i} + C_i(x_{i+1} - x) + D_i(x - x_i)$$

Para eliminar as constantes de integração  $C_i$  e  $D_i$  utiliza-se da 2ª condição:

$$S(x_i) = f_i$$

$$S(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

Segue que:

$$S(x) = -\frac{M_i(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + \frac{M_{i+1}(x - x_i)^2}{2h_i} + \frac{f_{i+1} - f_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_i}{h_i} \quad (II)$$

Para o intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$

$$S(x) = -\frac{M_{i-1}(X_i - X)^2}{2h_{i-1}} + \frac{M_i(X - X_{i-1})^2}{2h_{i-1}} + \frac{f_i - f_{i-1} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (III)$$

Para o intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$

Em  $X = X_i$

$$S(x_i) \in [x_{i-1}, x_i] = S(x_i) \in [x_i, x_{i+1}]$$

pois  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} S'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S'(x)$  pela condição de continuidade.

Logo:

$$-\frac{M_i(x_{i+1} - X_i)^2}{2h_i} + \frac{f_{i+1} - f_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_i}{h_i} = \frac{M_i(x_i - X_{i-1})^2}{2h_{i-1}} + \frac{f_i - f_{i-1} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Com algumas manipulações algébricas.

$$\frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} M_{i-1} + \frac{2M_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} M_{i+1}}{h_i + h_{i-1}} = f_{i+1} - f_i \left( \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \right) + f_i - f_{i-1} \left( \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \right) \quad (IV)$$

fazendo na equação (IV)

$$\delta_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$d_i = \frac{6(\delta_{i+1} - \delta_i)}{h_i + h_{i-1}}$$

Temos portanto o seguinte sistema de equações

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (V)$$

Se  $M_0 = M_n = 0$

$$2M_2 + \lambda_1 M_3 = d_1$$

$$\mu_n M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1}$$

$$d_n = \frac{6}{h_n} (f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n})$$

Convém observar que para se encontrar os valores dos  $n$  constantes  $M_i$  ( $i = 1, n$ ) usou-se a segunda condição que garante a continuidade da derivada primeira de um subintervalo a outro o que nos dá um total de  $n - 1$  equações.

Temos portanto um total de incógnita maior que o número de equações e na intenção de resolver esse impasse surge as definições de famílias de splines baseadas na escolha dos parâmetros  $\delta_i, \lambda_i, \mu_i, d_i$ .

Formando-se o sistema de equações obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & & & & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & & & & \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & & & & \\ & & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & 0 & & \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} & & & \\ 0 & \mu_n & 2 & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \\ \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \\ \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

O sistema anterior é um sistema tridiagonalmente e portanto é não singular. Um sistema tridiagonalmente dominante pode ser resolvido Computacionalmente através do algoritmo de Thomas. (Decomposição L. U) [1, 3, 6]

### 3.2 - Famílias de Splines [ 1, 2, 3 ]

As famílias de Splines são determinadas pela escolha dos parâmetros  $\lambda_1, d_1, \mu_n, d_n$  podemos ter:

#### 3.2.1 - Splines Naturais

As curvas obtidas fazendo-se  $\lambda_1 = d_1 = \lambda_n = d_n = 0$  com isso  $M_1 = M_n = 0$  isto é as derivadas segundas nos pontos iniciais e finais são nulas. Em geral denota-se as Splines Naturais por  $S^N(x)$ .

#### 3.2.2 - Splines com derivadas extremas conhecidas

Uma segunda opção para os parâmetros é escolhê-los de tal maneira que as derivadas primeiras de  $S(x)$  coincidam com as derivadas primeiras de  $f(x)$  nos pontos inicial e final. Para isso necessita-se conhecer evidentemente  $f'_1$  e  $f'_n$ . Desta condição decorrem

$$\lambda_1 = 1$$

$$\mu_n = 1$$

$$d_1 = \frac{6}{h_n} (f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n})$$

$$d_n = \frac{6}{h_n} (f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n})$$

### 3.2.3 - Splines com derivadas extremas Livres

Escolhe-se  $X_i$  com  $i = 1, n - 1$  como iis da Spline, isto é abandona-se os pontos inicial e final na construção da Spline e impõe-se que:

$$S_3(x_i) = f_i$$

$$S_{n-2}(x_n) = f_n$$

### 3.3. Propriedades das Splines [ 1, 2, 3, 6 ]

#### 3.3.1. Propriedade de Curvatura Mínima

Pode-se provar facilmente que  $\int_a^b [g''(x)]^2 dx = 1$  tem um valor mínimo quando e somente quando

$$g(x) = S(x)$$

Esta propriedade é chamada de propriedade de curvatura mínima. Isto significa que de todas as interpolações possíveis  $S(x)$  é a que melhor interpoia por partes uma dada função  $f(x)$

#### 3.3.2 - Erro de interpolação por Splines [ 1, 2, 3, 6 ]

Prova-se que o erro numa interpolação por Splines é da do por

$$|E(x)| \leq h^{3/2} (\int_a^b [f''(t)]^2 dt)^{1/2}$$

O erro é portanto dependente da curvatura da função  $f(x)$  a ser interpolada como também do intervalo  $h$  dos pontos da amostra.

Quando  $h \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$   $S(x)$  converge uniformemente para  $f(x)$

### 3.4. Sistemas tridiagonais (diagonalmente) dominante : $[ A ] [ X ] = [ B ]$

#### Definição 1

Um sistema é diagonalmente dominante se e somente se

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

#### Definição 2

Um sistema é dito tridiagonal quando todos os elementos da matriz dos coeficientes  $[ A ]$  são nulos exceto os seguintes.

$$a_{ii} \quad i = 1, n$$

$$a_{j, j+1} \quad j = 1, n-1$$

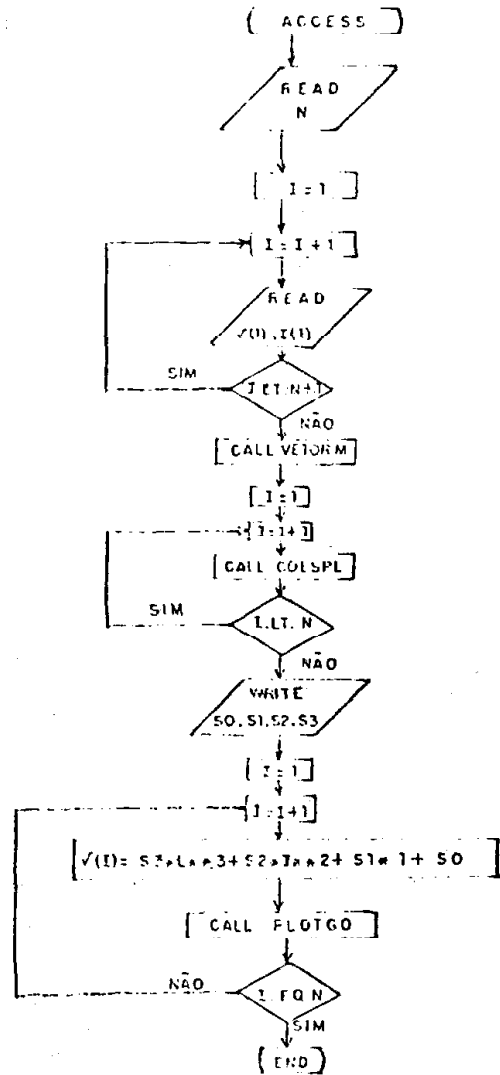
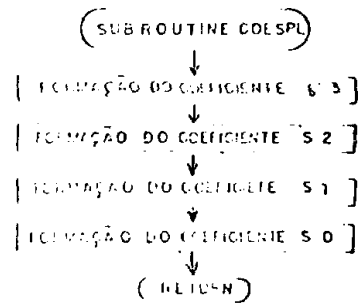
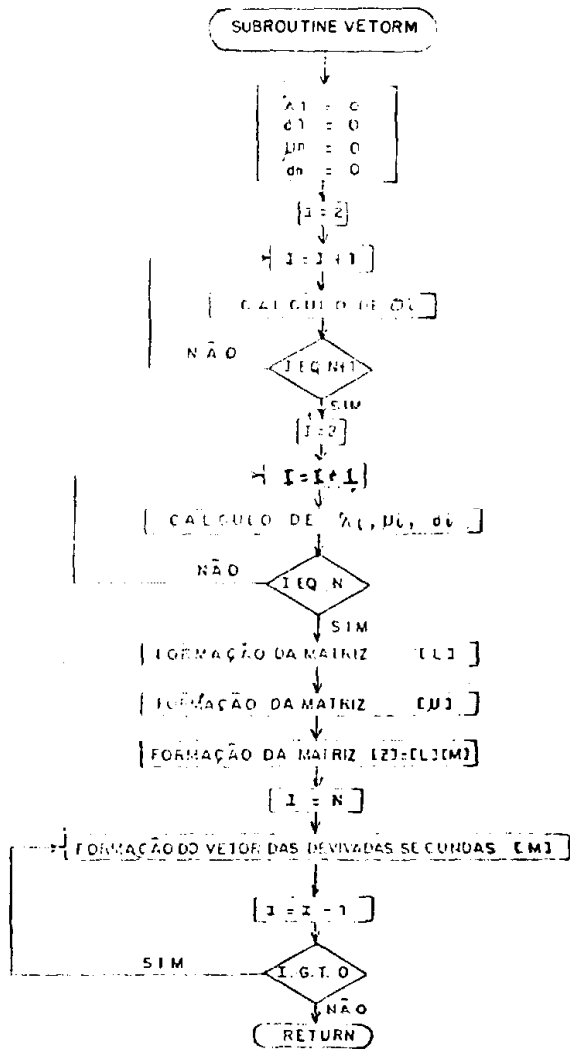
$$a_{j+1, j}$$

Com isso, implica que a matriz dos coeficientes é dito uma matriz banda de largura três [ 3 ].

### 3.5. Desenvolvimento Computacional

Algoritmo do programa para o cálculo das funções Splines que modelam curvas de magnetização  $V \times I$  (tensão x corrente) de Transformadores de Corrente – TC's.

Este fluxograma é referente ao programa SPL. FOR implementado no Dec - 10 da Universidade Federal do Ceará. Calcula os coeficientes e as funções Splines modeladoras para um conjunto de pontos amostrado. Tem também a propriedade de traçar as curvas de magnetização via vídeo ou impressora.



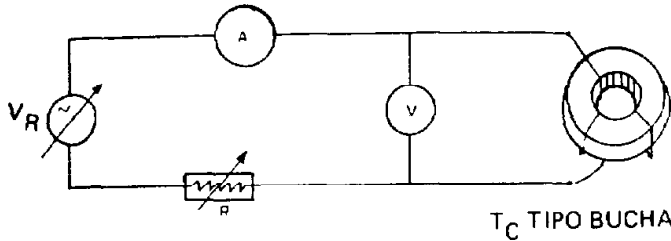
– A subroutine VETORM – forma o vetor das derivadas segundas das Splines para os diversos intervalos e resolve o sistema de Equação  $[ A ] [ M ] = [ D ]$  pelo método regressivo de Thomas.

– A subroutine COESPL – forma os coeficientes das Splines para os diversos intervalos.

– A subroutine PLOTGO – Subroutine interna do sistema para plotagem de gráficos.

#### 4. Ensaios de saturação do TC com excitação pelo secundário

Os pontos a serem interpolados pelo método desenvolvido foram obtidos a partir do esquema abaixo. Onde a tensão  $V$  média é a tensão secundária do transformador e a corrente  $A$  é corrente de excitação.



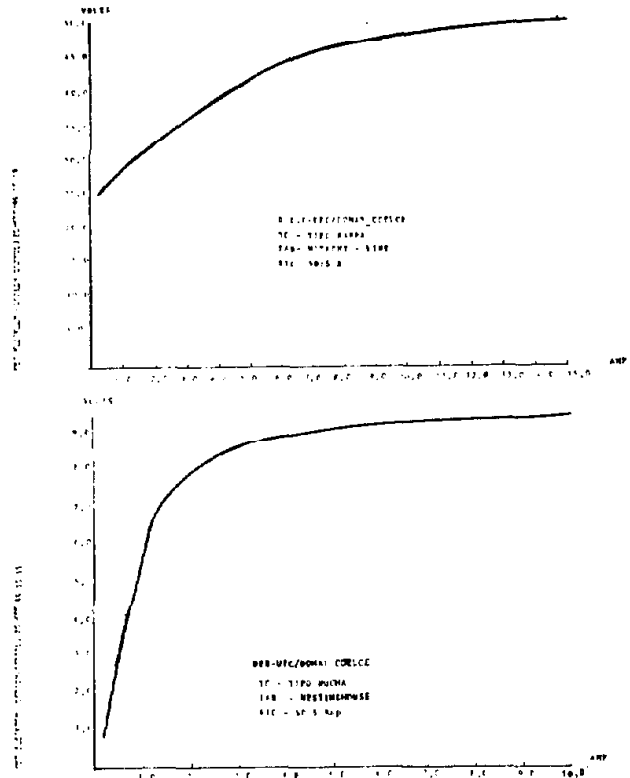
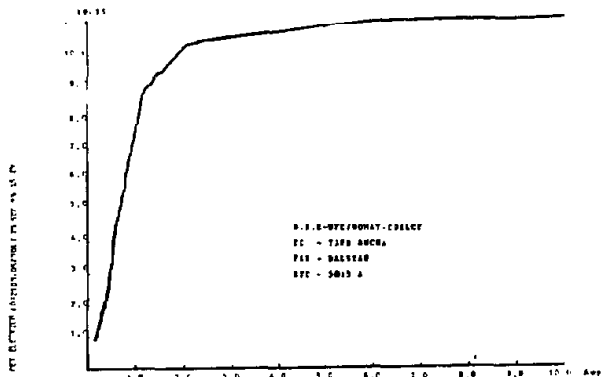
$V_R$  = Variador de tensão

$A$  = Amperímetro

$V$  = Voltímetro

$R$  = Resistor

TC Tipo: Bucha FAB: Westinghouse RTC: 50 - 5A		TC Tipo: Bucha FAB: Balteau RTC: 50 - 5A		TC Tipo: Bara FAB: Hitachi-Une RTC: 50 - 5A	
$I_s$	$V_s$	$I_s$	$V_s$	$I_s$	$V_s$
0,15	1,00	0,1	1,0	0,25	25,0
0,40	2,00	0,25	1,5	0,40	26,0
0,50	3,00	0,45	3,0	0,65	27,0
0,70	4,00	0,6	4,0	0,90	28,0
0,85	5,00	0,7	5,0	1,10	29,0
1,10	6,00	0,80	6,0	1,35	30,0
1,50	7,00	0,98	7,0	2,65	35,0
2,30	8,00	1,12	8,0	4,30	40,0
4,50	9,00	1,48	9,0	6,60	45,0
9,50	9,80	2,65	10,0	9,0	47,5
13,25	10,00	4,50	10,5	15,0	50,0
		14,0	11,5		



#### 5. CONCLUSÃO

A modelagem de curvas de saturação de TC's para proteção pelo método das Splines Cúbicas se mostra bastante satisfatória e precisa.

Dada a importância que tem uma modelagem precisa dessas curvas, o método tem uma larga aplicação prática como por exemplo, a resposta de TC's para proteção em função da variação de sua carga secundária-Relés - (trabalho nessa área foi desenvolvido por esse mesmo grupo), fabricação de TC's, normalização etc.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AHLBERG, H. J., E. H. NILSON, J. L. WALSM., "The Theory of Splines and their applications", Academic Press, New York, 1967.
2. PRENTER, P. M., "Splines and Variational Methods", John Wiley & Sons, 1975.
3. ATKINSON, KENDALL E., "An Introduction to Numerical Analysis", John Wiley & Sons, 1978.
4. OLIVEIRA, V. M., GONZALES Jr., L. C., ANDRADE, C. T. C., ALMEIDA, O. M., "Modelagem de Curvas de Magnetização", Anais do IV Congresso de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia, USP, São Carlos, 1985.
5. GONZALES Jr., L. C., OLIVEIRA, O. M., "Modelagem de Curvas de Magnetização por Interpolação Clássica". ANDRADE, C. T. C., OLIVEIRA O. M., "Um Estudo Sobre Modelagem de Curvas de Magnetização". Anais do IV Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa, UFC, 1985.
6. SANTOS, M. L. X., "Notas de Aula da Disciplina Métodos Numéricos em Teoria Eletromagnética", CETUC/PUC/RJ, pags. 97 - 141, 1981.