A FLEXÃO NORMAL COMPOSTA E SEUS CASOS PARTICULARES (1ª PARTE)

* Gulielmo Viana Dantas

O objetivo do presente trabalho é apresentar uma formulação para a flexão normal simples, compressão centrada, flexo-tração e flexo-compressão de seções de concreto armado como casos particulares da flexão normal composta.

1. INTRODUÇÃO

O autor deste trabalho tem observado ao longo de alguns anos como profissional da área de estruturas e, principalmente, como professor de concreto armado, que o tratamento dado na literatura existente, dos casos de solicitação citados acima são, em sua maioria, formulações isoladas, quando na verdade podem ser tratados através de uma única formulação. Senão vejamos.

A formulação apresentada é válida para qualquer tipo de seção transversal, desde que contenha pelo menos um eixo de simetria e que este coincida com o traço do plano de ação dos esforços com o plano da seção transversal. Os esforços externos são supostos aplicados no centro de gravidade da seção.

Para simplificar o tratamento algébrico, empregar-se-á exclusivamente o diagrama retangular de tensões para o concreto (Fig. 1).

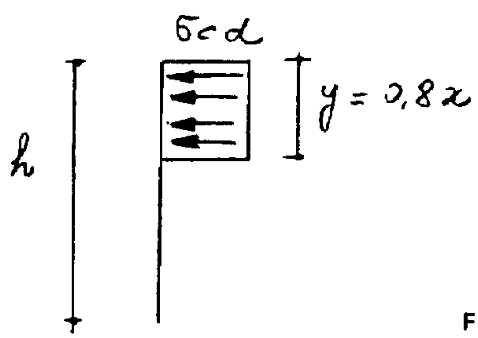


FIG. 1

Para os Aços da Classe A, adotar-se-á o diagrama da Fig. 2.

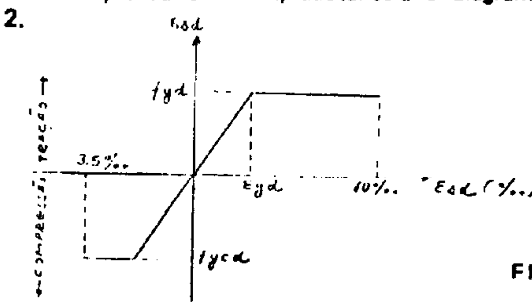


FIG. 2

E para os Aços da Classe B, adotar-se-á o diagrama simplificado da Fig. 3.

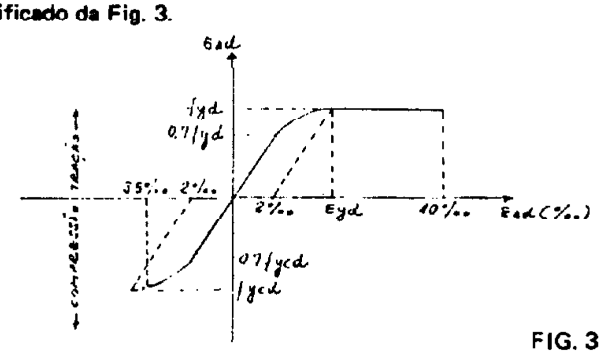


FIG. 3

Quanto aos domínios de deformações, representativos do conjunto dos diversos diagramas de deformações possíveis numa seção transversal, correspondentes a um estado li-

* Engo. Civil, M. Sc., Prof. da UNIFOR.

mite último, de ruptura convencional do concreto ou de deformação plástica excessiva da armadura, ilustra-se-ão na Fig. 4.

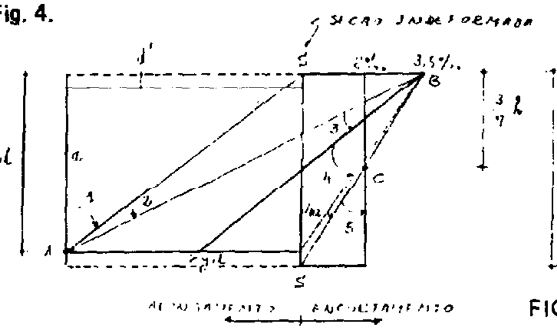


FIG. 4

2. ARMADURAS EM UMA OU DUAS BORDAS

Seja a seção genérica da Fig. 5.

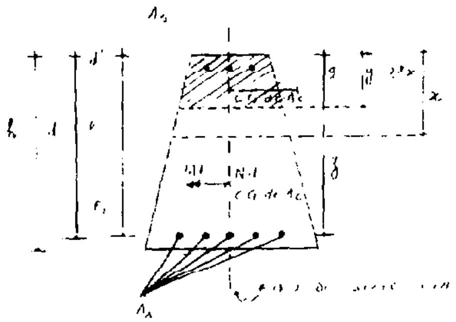


FIG. 5.

NOTAÇÕES

Ac	=	Área bruta da seção de concreto
A'c	=	Área comprimida de concreto
σcd	=	0,85 fcd ou 0,80 fcd - tensão de cálculo no concreto
Rcc	=	A'c σcd - resultante de compressão no concreto
g	=	Distância de Rcc à borda mais encurtada; em virtude do diagrama retangular de tensões no concreto, g coincide com o centro de gravidade de A'c
Nd	=	Esforço normal de cálculo, aplicado no centro de gravidade de Ac
Md	=	Momento fletor de cálculo
As1	=	Área total de armadura tracionada pelo efeito exclusivo do momento fletor
As2	=	Área total de armadura comprimida pelo efeito exclusivo do momento fletor
$\sigma s1d$	=	Tensão de cálculo na armadura As1
$\sigma s2d$	=	Tensão de cálculo na armadura As2
d	=	Distância de As1 à borda mais afastada (altura útil da seção no caso de vigas)
e_1	=	Distância de As1 ao centro de gravidade de Ac
e_2	=	Distância de As2 ao centro de gravidade de Ac
d'	=	Distância de As2 à borda mais próxima
h	=	Maior dimensão da seção na direção de Md
y	=	0,8x – altura de Acc
x	=	Posição da linha neutra
As	=	Área total de armadura (As = As1 + As2)

COEFICIENTES ADIMENSIONAIS:

Definam-se os coeficientes:

$$\nu = \frac{Nd}{\sigma cd.\ Ac}; \quad \mu = \frac{Md}{\sigma cd.\ Ac.\ h}$$

$$\beta 1 = \frac{\sigma s1d}{\sigma cd}; \quad \beta 2 = \frac{\sigma s2d}{\sigma cd}$$

$$\rho 1 = \frac{As1}{Ac}; \quad \rho 2 = \frac{As2}{Ac}; \quad \rho = \frac{As}{Ac}$$

$$\alpha x = \frac{x}{h}; \quad \alpha y = \frac{y}{h}$$

$$\alpha e1 = \frac{e1}{h}; \quad \alpha e2 = \frac{e2}{h}$$

$$\delta' = \frac{d'}{h}; \quad \delta = \frac{d}{h}$$

$$\psi = \frac{A'c}{Ac}; \quad \bar{\psi} = \frac{A'c}{Ac} \cdot \frac{g}{h} = \psi . \alpha g$$

CONVENÇÃO DE SINAIS:

Compressão: +
Tração: –
Encurtamento: +
Alongamento: –
Md: Considerar sempre positivo

FORMULAS GERAIS:

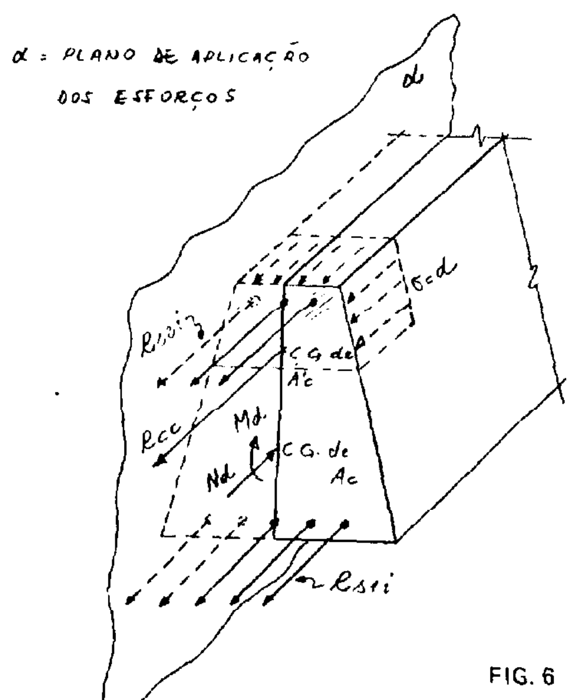


FIG. 6

TEMOS

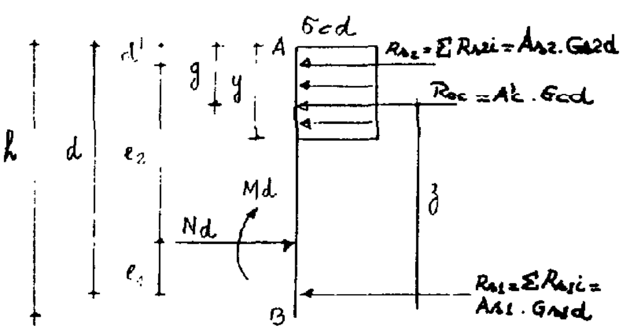


FIG - 7

I) Equação de equilíbrio das forças normais:

$\Sigma F = 0 \quad Nd = Rcc + Rs1 + Rs2$

ou

$$Nd = A'c \,.\, \sigma cd + As1 \,.\, \sigma s1d + As2 \,.\, \sigma s2d$$

Dividindo por (σcd . Ac), vem

$$\boxed{\nu = \psi + \rho 1 \,.\, \beta 1 + \rho 2 \,.\, \beta 2} \quad (1)$$

II) Equação de equilíbrio de momentos:

$\Sigma M_A = 0 \quad Nd(e2 + d') - Md = Rcc.\, g + Rs1.\, d + Rs2d'$

ou

$Nd(e2 + d') - Md = A'c.\, \sigma cd.\, g + As1.\, \sigma s1d.\, d +$

$+ As2.\, \sigma s2d.\, d'$

Dividindo por (σcd. Ac. h), vem,

$$\boxed{\nu\,(\alpha_{e2} + \delta') - \mu = \bar{\psi} + \rho 1.\beta 1.\delta + \rho 2.\beta 2.\delta'} \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), tem-se:

$$\boxed{\rho 1 = \frac{\alpha_{e2}.\nu - \mu - \bar{\psi} + \psi.\delta'}{\beta 1\,(\alpha_{e1} + \alpha_{e2})}} \quad (3)$$

$$\boxed{\rho 2 = \frac{\alpha_{e1}.\nu + \mu + \bar{\psi} - \psi.\delta}{\beta 2\,(\alpha_{e1} + \alpha_{e2})}} \quad (4)$$

E assim

$$\boxed{As1 = \rho 1 \,.\, Ac} \quad (5)$$

$$\boxed{As2 = \rho 2 \,.\, Ac} \quad (6)$$

OBSERVAÇÕES:

— As fórmulas (3) e (4) são generalizadas, fornecem portanto as armaduras concentradas em uma ou duas bordas para quaisquer combinações de carga e ou momento.

— Observe que as forças resistentes na seção foram supostas positivas (de compressão). Resultando-se, na resolução do problema, sinal negativo, tratar-se-à de tração.

— As equações de compatibilidade fornecerão as deformações com seus valores algébricos.

— O dimensionamento com armaduras em até duas bordas é mais utilizado para o cálculo de vigas e lajes, contudo (porém não é conveniente) pode ser utilizado para o cálculo de pilares.

3. FLEXÃO NORMAL SIMPLES COM ARMADURA SIMPLES:

TEMOS :

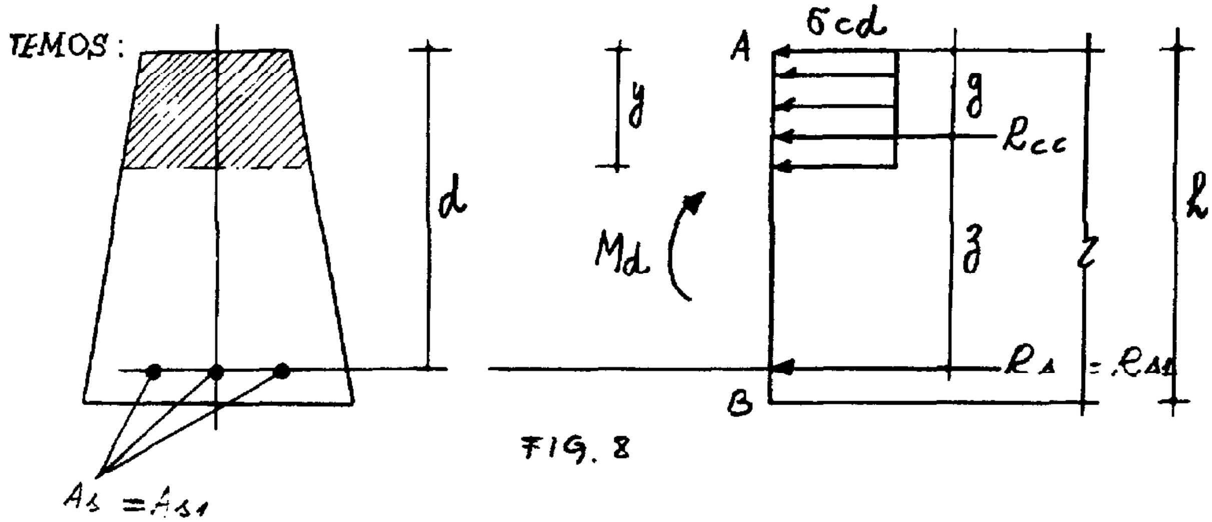


FIG. 8

Da equação de equilíbrio das forças, vem:

$\Sigma F = 0 \quad 0 = Rcc + Rs1$

$0 = A'c.\, \sigma cd + As1.\, \sigma s1d$

$0 = \psi + \rho 1 \,.\, \beta 1 \quad (7)$

$$\rho = \rho 1 = -\frac{\psi}{\beta 1} \quad (8)$$

Da equação de equilíbrio de momentos, vem:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -Md = Rcc.g + Rs1.d$$

$$-Md = A'c.\sigma cd.g + As1.\sigma s1d.d \quad \text{ou}$$

$$\boxed{-\mu = \overline{\psi} + \rho 1.\beta 1.\delta} \qquad (9)$$

Substituindo $\rho 1$ pelo valor dado em (8), vem:

$$\boxed{-\mu = \overline{\psi} - \psi.\delta} \qquad (10)$$

ou

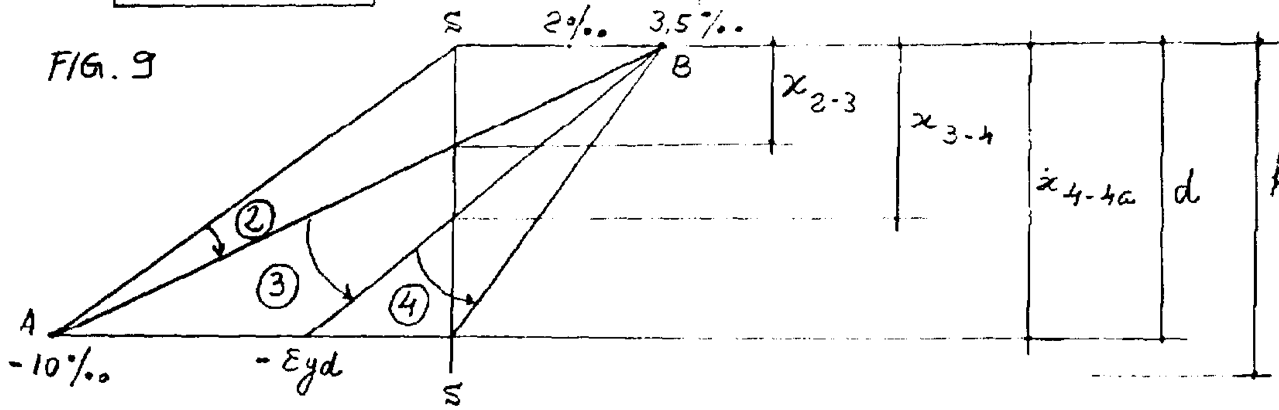
$$\boxed{\mu = -\overline{\psi} + \psi.\delta} \qquad (11)$$

A equação (8) fornece a taxa de armadura e a equação (10) (ou 11) fornece a posição da linha neutra.

Observe que as equações anteriores são casos particulares, ou seja, fazendo-se $\nu = 0$ e $\rho 2 = 0$ nas equações (1) e (2), obtém-se as equações (7) e (9).

POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA:

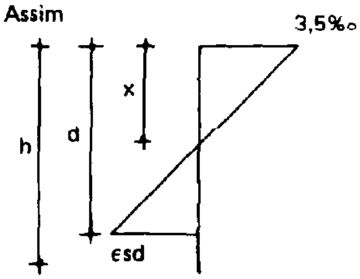
Os casos de flexão normal simples com armadura simples encontram-se no domínio 2, domínio 3 (seção subarmada) e domínio 4 (seção superarmada), (v. Fig. 9).



A posição da linha neutra pode ser fixada, de forma adimensional, pelo coeficiente.

$$\alpha x = \frac{x}{h}$$

Assim



$$\frac{3,5}{x} = \frac{3,5 + /\varepsilon sd/}{d}$$

$$x = \frac{3,5}{3,5 + /\varepsilon sd} \, d$$

$$\alpha x = \frac{3,5}{3,5 + /\varepsilon sd/} \, \frac{d}{h}$$

$$\text{Fazendo,} \quad \boxed{\frac{3,5}{3,5 + /\varepsilon sd/} = \xi} \qquad (12)$$

$$\text{Então} \quad \boxed{\alpha x = \xi.\delta} \qquad (13)$$

Portanto,

$$\boxed{\alpha x_{2-3} = 0,259\,\delta = \xi_{2-3}.\delta} \qquad (14)$$

$$\boxed{\alpha_{x3-4} = \frac{3,5}{3,5 + \varepsilon yd}\,\delta = \xi_{3-4}.\delta} \qquad (15)$$

$$\boxed{\alpha_{x\,4-4a} = \delta} \qquad (16)$$

A situação desejável para projeto é fixar para α_x o valor de $\alpha_{x\,3-4}$, pois, nessa situação os dois materiais (concreto e aço) são aproveitados inteiramente, não há risco de ruína não-avisada e, em geral, corresponde ao dimensionamento econômico, ou não está muito longe dele.

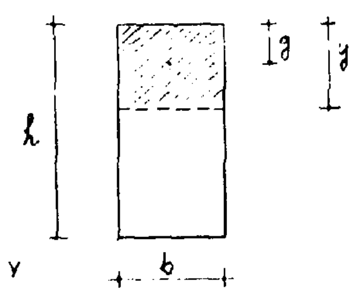
Quando, na flexão simples, $\alpha_x \neq \alpha_{x\,3-4}$, escolhe-se $\alpha_x < \alpha_{x\,3-4}$, pois as peças que chegam ao estado limite último com $\alpha_x > \alpha_{x\,3-4}$ se encontram no domínio 4 e conduzem a rupturas frágeis (não-avisadas), portanto, devem ser evitadas.

VALORES DE ψ E $\overline{\psi}$ PARA SEÇÃO RETANGULAR:

$A'c = b.y$

$Ac = b.h$

$g = y/2$



$$\psi = \frac{A'c}{Ac} = \frac{b.y}{b.h} = \frac{y}{h}$$

$$\psi = \alpha.y \qquad (17)$$

$$\overline{\psi} = \psi.\alpha g = \alpha y.\frac{g}{h} = \alpha y.\frac{y}{2h} = \alpha y.\frac{\alpha y}{2}$$

$$\overline{\psi} = \alpha y^2/2 \qquad (18)$$

ALTURA ÚTIL MÍNIMA (da seção retangular):

Substituindo em (11) os valores de ψ e $\bar{\psi}$ dados por (17) e (18), teremos:

$$\mu = -\alpha y^2/2 + \alpha y.\delta \qquad (19)$$

ou

$$\alpha y = \delta - \sqrt{\delta^2 - 2\mu} \qquad (19A)$$

levando em conta que $\alpha y = 0{,}8\,\alpha x$ e considerando a equação (13), vem:

$$\mu = 0{,}8\ \xi\ (1 - 0{,}4\ \xi)\ \delta^2 \qquad (20)$$

$$\frac{Md}{\sigma cd.bh^2} = 0{,}8\,\xi\,(1 - 0{,}4\,\xi)\,\frac{d^2}{h^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{1}{0{,}8\,\xi\,(1 - 0{,}4\,\xi)}}\ \sqrt{\frac{Md}{\sigma cd.\,b}} \qquad (21)$$

$$d = \zeta \cdot \sqrt{\frac{Md}{\sigma cd.\,b}} \qquad (22)$$

com

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{0{,}8\,\xi \times (1 - 0{,}4\,\xi)}} \qquad (23)$$

Obs: Usa-se para altura útil mínima $\xi = \xi_{3-4}$ máx

Exemplo 1:

Dado Md = 84kN.m (8400kgf.m) calcular a altura útil mínima e a armadura simples de uma seção retangular. Considere:

fck = 20MPa (200kgf/cm2)

AÇO CA - 50B

b = 20 cm

$\gamma c = 1{,}4$

$\gamma s = 1{,}15$

Solução:

Temos

AÇO CA-50B – $\epsilon yd = 4{,}07‰$

De (15) — $\xi 3-4 = 0{,}462$

De (20) — $\mu 3-4 = 0{,}301\ \delta^2$

De (23) — $\zeta 3-4 = 1{,}821$

Md = 84kN.m = 8400kN.cm

fck = 20 MPa = 2,0 kN/cm2

$$\sigma cd = 0{,}85\ fcd = 0{,}85\,\frac{2{,}0}{1{,}4} = 1{,}21\text{kN/cm}^2$$

fyk = 500 MPa = 50 kN/cm²

fyd = fyk/1,15 = 50/1,15 = 43,48 k N/cm2

Assim

$$d = 1{,}821\sqrt{\frac{8400}{1{,}21 \times 20}} = 33{,}93 - 34\text{ cm}$$

Então:

h = d + 3cm = 37cm

δ = d/h = 34/37 = 0,92

e

$\alpha x\ 3-4 = 0{,}462 \times 0{,}92 = 0{,}425$

$\alpha y\ 3-4 = 0{,}425 \times 0{,}8 = 0{,}340 = \psi\ 3-4$

$$\beta 1 = \frac{\sigma s_1 d}{\sigma cd} = \frac{-43{,}48}{1{,}21} = -35{,}93$$

Portanto

$$\rho = \rho 1 = -\frac{\psi}{\beta 1} = \frac{0{,}340}{35{,}93} = 0{,}0095 = 0{,}95\% > 0{,}15\%$$

As = As1 = $\rho 1$. Ac = 0,0095 x 20 x 37 = 7,03 cm2

Exemplo 2:

Dada uma seção: b = 20cm, d = 40cm e h = 43cm, calcular a armadura simples para que a seção resista ao momento Md = 84kNm. Considere os outros dados iguais ao do problema anterior.

Solução: Temos

Ac = 20 x 43 = 860 cm2

$$\mu = \frac{Md}{\sigma cd.\ Ac.h} = \frac{8400}{1{,}21 \times 860 \times 43} = 0{,}188$$

δ = d/h = 40/43 = 0,93

De (14) — $\xi\ 2-3 = 0{,}259$

De (15) — $\xi\ 3-4 = 0{,}462$

De (20) $- \mu\ 2\text{-}3 = 0{,}186\ \delta^2 = 0{,}161$

$\mu\ 3\text{-}4 = 0{,}301\ \delta^2 = 0{,}260$

Logo

$\mu\ 2\text{-}3 < \mu < \mu\ 3\text{-}4$ – Domínio 3 (peça subarmada)

Da equação (19), *teremos:*

$0{,}188 = -\alpha y^2/2 + \alpha y . 0{,}93$

$\alpha y = 0{,}231 = \psi$

e $\beta 1 = \dfrac{\sigma s_1 d}{\sigma cd} = -\dfrac{43{,}48}{1{,}21} = -35{,}93$

Portanto,

$\rho = \rho 1 = -\dfrac{\psi}{\beta 1} = \dfrac{0{,}231}{35{,}93} = 0{,}0064 = 0{,}64\% > 0{,}15\%$

$As = As1 = 0{,}0064 \times 20 \times 43 = 5{,}50$ cm2

Exemplo 3:

No problema anterior considere d = 47 cm e h = 50 cm.

Solução: Temos

$Ac = 20 \times 50 = 1000$ cm2

$\mu = \dfrac{8400}{1{,}21 \times 1000 \times 50} = 0{,}139$

$\delta = 47/50 = 0{,}94$

De (14) $- \xi\ 2\text{-}3 = 0{,}259$

De (20) $- \mu 2\text{-}3 = 0{,}186\delta^2 = 0{,}164$

Logo $\mu < \mu\ 2\text{-}3$ deformada no domínio 2

Da equação (19), teremos:

$0{,}139 = -\alpha y 2/2 + \alpha y \times 0{,}94$

$\alpha y = 0{,}162 = \psi$

e

$\beta 1 = -35{,}93$

Portanto,

$\rho = \rho 1 = \dfrac{0{,}162}{35{,}93} = 0{,}0045 = 0{,}45\% > 0{,}15\%$

$As = As1 = 0{,}0045 \times 20 \times 50 = 4{,}50$ cm2

Exemplo 4:

No problema 2 considere d = 87 cm e h = 90 cm

Solução: Temos

$Ac = 20 \times 90 = 1800$ cm2

$\mu = \dfrac{8400}{1{,}21 \times 1800 \times 90} = 0{,}043$

$\delta = 87/90 = 0{,}97$

$\mu 2\text{-}3 = 0{,}186 \times 0{,}97^2 = 0{,}175$

$\mu < \mu 2\text{-}3$ Deformada no domínio 2

$0{,}043 = -\alpha y^2/2 + \alpha y \times 0{,}97$

$\alpha y = 0{,}045 = \psi$

$\beta 1 = -35{,}93$

$\rho = \rho 1 = \dfrac{0{,}045}{35{,}93} = 0{,}0013 = 0{,}13\% < 0{,}15\%$

$As = As1 = \dfrac{0{,}15}{100} \times 20 \times 90 = 2{,}70$ cm2 - Armadura mínima

Exemplo 5:

Considere no problema 2 d = 32 cm e h = 35 cm

Solução: Temos

$Ac = 20 \times 35 = 700$ cm2

$\mu = \dfrac{8400}{1{,}21 \times 700 \times 35} = 0{,}283$

$\delta = d/h = 32/35 = 0{,}91$

$\mu 3\text{-}4 = 0{,}301\ \delta^2 = 0{,}301 \times 0{,}91^2 = 0{,}249$

$\mu > \mu 3\text{-}4$ Domínio 4 (peças superarmada); usar armadura dupla.

Obs.: *Continua no próximo número.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1) Notas de Aula – Prof. Gulielmo Viana Dantas.
2) Cálculo de Concreto Armado, Vol. 1 - Lauro Modesto dos Santos.
3) Cálculo de Concreto Armado, Vol. 2 - Lauro Modesto dos Santos.
4) Estruturas de Concreto Solicitações Normais - Péricles Brasiliense Fusco.