

# FLECHAS DE VIGAS EM BALANÇO

\* Eduardo César Cordeiro Leite

\*\* Airtón Carneiro Leite

*O presente trabalho tem a finalidade de apresentar um modelo estrutural mais refinado para o cálculo de flechas de vigas em balanço. O modelo além do trecho em balanço, consiste de um vão bi-apoiado contíguo ao balanço, o qual, contribui com a rotação da seção do apoio, no cálculo do afundamento do bordo livre.*

*É apresentado todo o procedimento adotado, bem como uma aplicação do modelo, considerando as hipóteses de cálculo.*

*Uma listagem em linguagem BASIC da sub-rotina para o cálculo de rotações de seções extremas em vigas bi-apoiadas, é apresentada ao final deste trabalho.*

## INTRODUÇÃO

No cálculo do deslocamento vertical de seções extremas de vigas em balanço, na maioria das vezes e até por maior simplicidade, calculamos o afundamento do bordo livre do balanço, como se o mesmo se comportasse como uma viga engastada livre.

O fato é que, em alguns casos da prática, projetistas recomendam contra-flechas nas extremidades em balanço e quando da aplicação das cargas de serviço, a viga não volta a posição horizontal estimada.

Em outros casos, mesmo após a adoção de contra-flechas nas extremidades em balanço a estrutura continua deformando além do plano que contém os apoios, as vezes até ultrapassando aos limites previstos pela NBR 6118 e em algumas situações, provocando fissuras desagradáveis em alvenarias, esmagamento de esquadrias, etc.

Situações como estas, levam alguns projetistas a tomarem precauções adequadas para evitar tais conseqüências indesejáveis.

É óbvio que, vários fatores assim como, deformação lenta, inadequada modelagem estrutural, etc, influenciam no comportamento real da estrutura, não compatibilizando, desta forma, com a idealização adotada no cálculo.

Dentre estes fatores, frisamos a influência da inadequada modelagem estrutural, em decorrência do exposto no parágrafo inicial desta introdução.

Na verdade, até quando tal simplificação de cálculo poderá incorrer em erros grosseiros, até contra a segurança?

Face ao exposto, resolveu-se, no presente trabalho, estudar a contribuição da continuidade de vigas em balanço, no cálculo da flecha da extremidade livre, utilizando um modelo que possibilite tal finalidade.

Achamos conveniente transcrevermos o que a NBR 6118 recomenda a respeito de deslocamento limite em balanços de estruturas de edifícios.

a) As flechas medidas a partir do plano que contém os apoios, quando atuarem todas as ações, não ultrapassaram 1/500 do comprimento teórico do balanço.

b) O deslocamento causado pelas cargas acidentais não será superior a 1/250 do comprimento teórico dos balanços.

## PROCEDIMENTOS:

Apresentamos, como segue, os procedimentos adotados no presente trabalho.

Será considerado em todo o trabalho a teoria das vigas esbeltas, as quais valem todas as hipóteses que salientamos como segue;

- As seções planas permanecem planas;
- As deformações serão consideradas como pequenas;

---

\* Prof. M. Sc da Universidade de Fortaleza  
\*\* Eng.<sup>o</sup> Civil - Diretor Técnico de PROJESCON

– Material elástico linear, obedecendo portanto a lei de Hooke.

A metodologia apresentada poderá ser aplicada tanto para vigas hiperestáticas como para vigas isostáticas, haja visto que, só queremos estudar a influência das rotações no cálculo de deslocamentos verticais das extremidades dos balanços, veja o modelo

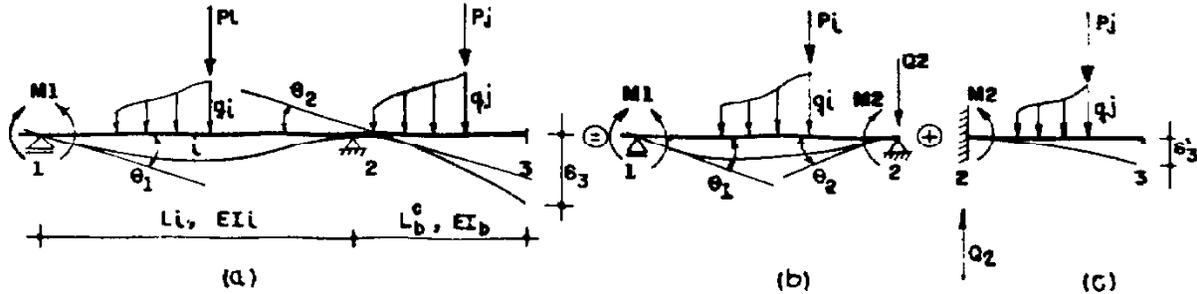


FIGURA 1.0

A ação do balanço, sujeito a cargas verticais ativas, será substituída pelo seu carregamento nodal equivalente, ou seja, por uma força cortante  $Q_2$  e um conjugado  $M_2$ . A força cortante  $Q_2$  é transmitida diretamente ao apoio e somente o momento  $M_2$  será considerado, veja fig. 1.0.

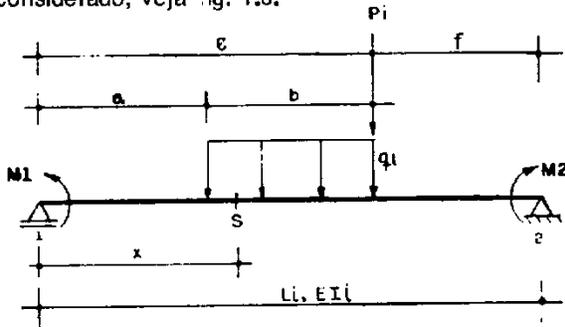


FIGURA 2.0

Desta forma, inicialmente determinou-se para as cargas mais comuns utilizadas na prática o deslocamento vertical em qualquer seção transversal S entre os apoios 1 e 2 de uma viga bi-apoiada com inércia constante ao longo do vão, figura 2.0.

Devido a  $M_1$  e  $M_2$  :

$$y(x) = \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{x}{6L_1} (L_1 - x) \left[ (M_1 - M_2)x - (2M_1 + M_2)L_1 \right] \right\} \quad (1.0)$$

Devido a  $P_1$  :

–  $0 \leq x \leq e$  (seção antes da carga concentrada)

$$y(x) = \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{P_1 f}{6L_1} (L_1^2 - f^2 - x^2) \right\} \quad (2.1)$$

–  $e \leq x \leq L_1$  (seção após a carga concentrada)

$$y(x) = \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{P_1 e}{6L_1} (L_1 - x) \left[ x(2L_1 - x) - e^2 \right] \right\} \quad (2.2)$$

proposto da fig. 1.0(a).

Assim, uma viga com sua extremidade em balanço poderá ser dividida em duas partes:

- uma entre os apoios, fig. 1.0(b), a qual será tratada como uma viga simplesmente apoiada;
- e a outra, o balanço, fig. 1.0(c), o qual será tratado como uma viga engastada livre.

Devido a  $q_i$  :

–  $0 \leq x \leq a$  (seção antes da carga distribuída)

$$y(x) = \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{q_i x}{24L_1} \left[ \alpha(L_1^2 - x^2) - \beta \right] \right\} \quad (3.1)$$

–  $a \leq x \leq e$  (seção no trecho de carga distribuída)

$$y(x) = \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{q_i}{24} \left[ \frac{x}{L_1} \left[ \alpha(L_1^2 - x^2) - \beta \right] + (x - a)^4 \right] \right\} \quad (3.2)$$

–  $e \leq x \leq L_1$  (seção após a carga distribuída)

$$y(x) = \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{q_i}{24} \left[ \frac{x}{L_1} \left[ \alpha(L_1^2 - x^2) - \beta \right] + (x - a)^4 - (x - a - b)^4 \right] \right\} \quad (3.3)$$

onde,

$$\alpha = 2b(2f + b) \quad (3.4)$$

$$\beta = (L_1 - a)^4 - f^4 \quad (3.5)$$

Podemos, através da Resistência dos Materiais, determinar as rotações em uma seção qualquer a partir da equação expressa em radianos:

$$\Theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} \quad (4.0)$$

Assim, da equação (4.0) aplicada as expressões que calculam o deslocamento vertical, determinou-se as rotações das seções extremas 1 e 2 da viga bi-apoiada da figura 2.0 sujeita ao carregamento indicado, ou seja:

Devido a  $M_1$  e  $M_2$  :

$$\Theta_1^{(M)} = \frac{1}{EI_1} \left[ \frac{L_1}{6} (2M_1 + M_2) \right] \quad (5.1)$$

$$\Theta_2^{(M)} = \frac{1}{EI_1} \left[ \frac{L_1}{6} (M_1 + 2M_2) \right] \quad (5.2)$$

Devido a  $P_i$  :

$$\Theta_1^{P_i} = \frac{1}{EI_1} \left[ \frac{P_i f}{6L_1} (L_1^2 - f^2) \right] \quad (6.1)$$

$$\Theta_2^{P_i} = \frac{1}{EI_1} \left[ \frac{P_i e}{6L_1} (L_1^2 - e^2) \right] \quad (6.2)$$

Devido a  $q_i$  :

$$\Theta_1^{q_i} = \frac{1}{EI_1} \left[ \frac{q_i}{24L_1} (\alpha L_1^2 - \beta) \right] \quad (7.1)$$

$$\Theta_2^{q_i} = \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{q_i}{24L_1} [4L_1 \gamma - (2\alpha L_1^2 + \beta)] \right\} \quad (7.2)$$

onde,  $\alpha$  e  $\beta$  está definido pelas expressões (3.4) e (3.5), respectivamente, enquanto  $\gamma$ , será dado por:

$$\gamma = (L_1 - a)^3 - f^3 \quad (8.0)$$

Para um número maior de cargas concentradas e cargas distribuídas no vão 12, utilizaremos o princípio da superposição dos efeitos, senão vejamos:

$$\Theta_1 = \Theta_1^{(M)} + \sum \Theta_1^{(q_i)} + \sum \Theta_1^{(P_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9.1)$$

$$\Theta_2 = \Theta_2^{(M)} + \sum \Theta_2^{(q_i)} + \sum \Theta_2^{(P_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9.2)$$

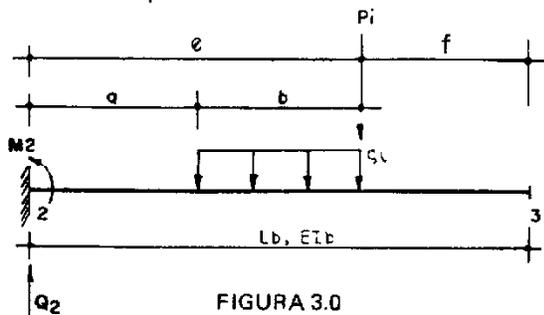


FIGURA 3.0

Estudando agora o balanço (fig. 3.0) como uma viga engastada livre de inércia constante e também sujeito a cargas concentradas e distribuídas, podemos determinar o afundamento em sua extremidade a partir das equações:

Devido a  $P_i$  :

$$\delta_3^{(P_i)} = \frac{P_i e^2}{6EI_b} (2L_b + f) \quad (10.0)$$

Devido a  $q_i$  :

$$\delta_3^{(q_i)} = \frac{q_i}{24EI_b} \left[ (3e^4 + a^4 - 4a^3e) - 4f(a^3 - e^3) \right] \quad (11.0)$$

Para um número maior de cargas concentradas e distribuídas no balanço, utilizaremos também o princípio da superposição dos efeitos e o valor do deslocamento vertical no bordo livre da viga engastada livre será:

$$\delta_3' = \sum \delta_3^{(q_i)} + \sum \delta_3^{(P_i)} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (12.0)$$

Obtido a rotação da seção que liga o vão bi-apoiado ao balanço, o afundamento no bordo livre será dado pela equação (12.0), acrescido da parcela  $\Delta \delta_3$ , que por estarmos considerando as deformações como pequenas podemos escrever:

$$\Delta \delta_3 = L_b \cdot \Theta_i \quad (13.0)$$

Onde  $\Theta_i$ , será  $\Theta_1$  se o balanço estiver a esquerda do vão bi-apoiado e será  $\Theta_2$  se o balanço estiver a direita do mesmo e ambos valores serão expressos pelas equações (9.1) e (9.2), respectivamente.

Desta forma, o valor do afundamento no bordo livre, conforme foi dito, será:

$$\delta_3 = \delta_3' + \Delta \delta_3 \quad (14.0)$$

A partir da expressão (14.0), verifica-se que, o deslocamento vertical do bordo livre ( $\delta_3$ ), é uma combinação linear do deslocamento de uma viga engastada livre ( $\delta_3'$ ), acrescido da parcela de contribuição devida a rotação da seção transversal ( $\Delta \delta_3$ ), que liga o vão central ao balanço.

Deve-se observar que, em uma viga contínua, o valor de  $M_1$  (Fig. 2.0) deverá ser calculado inicialmente através de qualquer método conhecido na hiperestática clássica, pois o mesmo assegura a contribuição da continuidade dos vão contíguos.

## APLICAÇÃO

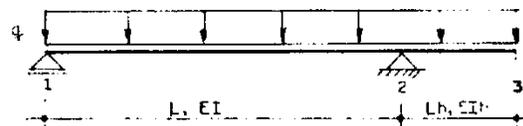


FIGURA 4.0

A partir das deduções apresentadas, resolveu-se estudar o comportamento de uma viga com uma extremidade em balanço, sob a ação de uma carga uniformemente distribuída ao longo de toda a viga, conforme ilustra fig. 4.0.

Logo, conhecendo o carregamento nodal equivalente do balanço e utilizando-se da eq. (9.2) chega-se a rotação da seção transversal 2, como sendo:

$$\Theta_2 = \frac{qL^3}{24EI} \left[ 4 \left( \frac{L_b}{L} \right)^2 - 1 \right] \quad (a)$$

O afundamento do extremo em balanço, funcionando como engastado livre, será:

$$\delta_3' = \frac{3qL^4_b}{24EI_b} \quad (b)$$

E o deslocamento total em 3 será:

$$\delta_3 = \frac{qL^4_b}{24EI_b} \left\{ 3 + \Psi \left( \frac{L}{L_b} \right)^3 \left[ 4 \left( \frac{L_b}{L} \right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (c)$$

onde,

$$\Psi = \frac{i_b}{I} \quad (d)$$

Observa-se em (c) que a parcela de acréscimo em  $\delta_3$  além de  $\delta_3$  é:

$$\Delta \delta_3 = \frac{qL_b^4}{24EI_b} \left\{ \Psi \left( \frac{1}{\xi} \right)^3 \left[ 4\xi^2 - 1 \right] \right\} \quad (e)$$

onde:

$$\xi = \left( \frac{L_b}{L} \right) \quad (f)$$

Parametrizando-se a equação (e) e fazendo  $\Psi = 1$ , chega-se a:

$$\overline{\Delta \delta_3} = \left( \frac{1}{\xi} \right)^3 \left[ 4\xi^2 - 1 \right] \quad (g)$$

onde

$$\overline{\Delta \delta_3} = \Delta \delta_3 / \left( \frac{qL_b^4}{24EI} \right) \quad (h)$$

Desta forma, traçou-se o gráfico da fig. 5.0, o qual ilustra a redução e o acréscimo em  $\delta_3$  a partir da relação entre o comprimento  $L_b$  do balanço e o comprimento L do vão 12.

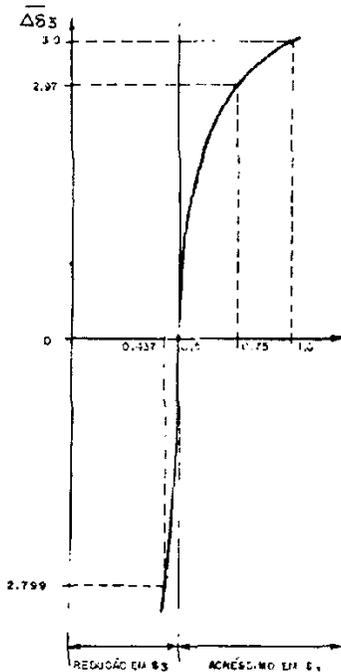


FIGURA 5.0

A partir do gráfico da fig. 5.0 do exemplo em pauta, nota-se que, quando  $\xi = 0,5$ , ou seja  $L_b = 0,5L$ , o trecho em balanço funciona como uma viga engastada livre não tendo, portanto, a contribuição da rotação  $\theta_2$  no acréscimo de  $\delta_3$ .

Quando  $\xi < 0,5$ , ou seja  $L_b < 0,5L$ , a contribuição da rotação  $\theta_2$  é de reduzir o valor de  $\delta_3$ , ou seja, o deslocamento  $\delta_3$  será inferior ao afundamento calculado  $\delta_3$  como se o balanço funcionasse como uma viga engastada livre.

Para  $\xi > 0,5$ , ou seja  $L_b > 0,5L$ , a participação de  $\theta_2$  é de acrescentar o valor de  $\delta_3$  além do valor calculado como se o balanço funcionasse como engaste livre.

## CONCLUSÃO

A partir dos dados obtidos com o modelo proposto no presente trabalho, constatou-se que:

– em relação ao modelo engastado/livre, o modelo proposto simula com mais semelhança à realidade, o deslocamento do extremo em balanço.

– a relação entre a rigidez do balanço e a rigidez do vão contíguo influenciará no cálculo do afundamento do extremo livre.

– Outro fator é que, se em alguns casos as cargas mais elevadas (sobrecarga + cargas permanentes) atuarem no vão contíguo ao balanço haverá redução no deslocamento bordo livre.

## LISTAGEM:

É apresentada a seguir, a listagem em Linguagem BASIC da sub-rotina que calcula a contribuição das rotações de um vão bi-apoiado, como o da fig. 2.9 sujeito as cargas indicadas.

Tal sub-rotina servirá como base para implementações em programas que calculam flechas de vigas em balanço considerando apenas o modelo da fig. 3.0.

## NOTAÇÕES

M = comprimento do trecho da carga uniformemente distribuída

P = carga concentrada no final do trecho

Q = carga uniformemente distribuída

X(T<sub>1</sub> - 1) = momento no apoio a esquerda (M<sub>1</sub>)

X(T<sub>1</sub>) = momento no apoio a direita (M<sub>2</sub>)

LV = comprimento do vão L<sub>i</sub>

J = número de trechos em carga distribuída

AL = valor de  $\alpha$ , conforme equação (3.4)

BT = valor de  $\beta$ , conforme equação (3.5)

GM = valor de  $\delta$ , conforme equação (8.0)

L = comprimento do balanço

I...  $\begin{cases} = 0, \text{ balanço a esquerda} \\ = 1, \text{ existe balanço a direita} \end{cases}$

TT = valor de  $\theta$ , a depender de I

```

14981 IF I=0 THEN 14990 ELSE 15010
14982 GOTO 15050          CALCULA 01
14983 GOTO 15020
14984 GOTO 15470          CALCULA 02
15000 FBLE=L*TT          S=P*0
15010 FBLE=FBLE+FBLE
15040 RETURN
15050 /
15060 /*****
15070 /SUB-ROTINA QUE CALCULA 01*/
15080 /*****
15090 /
15100 T=IJ+I-1
15110 LV=L(T):J=N(T)
15120 /
15130 /***DEVIDO AOS MOMENTOS DE BORDO***
15140 /
15150 T1=2*(I+1)
15160 DIP1=2*x(T1-1)-x(T1)
15170 TT=LV*DIP1/6
15180 /
15190 /***DEVIDO AS CARGAS NO VAO***
15200 /
15210 IF J=1 THEN 15400
15220 A=0:E=0:F=0
15230 FOR K=1 TO J
15240 M=M(K,T):Q=Q(K,T):F=P(K,T)
15250 E=E+M:F=L+E
15260 /
15270 /***DEVIDO AS CARGAS CONCENTRADAS***
15280 /
15290 TT=TT+P*(LV^2-E^2)/LV^3
15300 /
15310 /***DEVIDO A CARGA DISTRIBUIDA***
15320 /
15330 AL=2*M*(2+F+M)
15340 BT=(LV-A)^4-F^4
15350 GM=(LV-A)^3-F^3
15360 TT=TT+Q*(AL+LV^2-BT)/LV^24
15370 A=A+M
15380 NEXT K
15390 GOTO 15420
15400 Q=Q(J,T)
15410 TT=TT+Q*LV^3/24
15420 RETURN
15430 /
15440 /*****
15450 /SUB-ROTINA QUE CALCULA 02*/
15460 /*****
15470 /
15480 T=IJ+I-1
15490 LV=L(T):J=N(T)
15500 /
15510 /***DEVIDO AOS MOMENTOS DE BORDO***
15520 /
15530 T1=2*(I-1)
15540 DIP1=X(T1-1)-2*X(T1)
15550 IT=LV*DIP1/6
15560 /
15570 /***DEVIDO AS CARGAS NO VAO***
15580 /
15590 IF J=1 THEN 15780
15600 A=0:E=0:F=0
15610 FOR K=1 TO J
15620 M=M(K,T):Q=Q(K,T):F=P(K,T)
15630 E=E+M:F=L+E
15640 /
15650 /***DEVIDO A CARGA CONCENTRADA***
15660 /
15670 TT=TT+P*(LV^2-E^2)/LV^3
15680 /
15690 /***DEVIDO A CARGA DISTRIBUIDA***
15700 /
15710 AL=2*M*(2+F+M)
15720 BT=(LV-A)^4-F^4
15730 GM=(LV-A)^3-F^3
15740 TT=TT+Q*(AL+LV^2-BT)/LV^24
15750 A=A+M
15760 NEXT K
15770 GOTO 15800
15780 Q=Q(J,T)
15790 TT=TT+Q*LV^3/24
15800 RETURN
15810 /*****FLM*****

```

BEYER Kurt, "Die Stetik im Stahlbetonbau", 2: edição, Berlin — Göttingen — Heidelberg: Editorial Springer, 1957.

SILVA Jr., Jaime F., "Resistência dos Materiais", 4: edição, Belo Horizonte: imprensa universitária da UFMG, 1978.

—, "Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado — NBR-6118", Associação Brasileira de Normas Técnicas — A.B.N.T., 1978.