

FUNÇÃO DE TENSÕES DE A. PUCHER PARA O CÁLCULO DOS ESFORÇOS NAS CASCAS PELA TEORIA DE MEMBRANA.

* Benedito Torquato de Oliveira

O objetivo deste artigo é mostrar de maneira didática, a dedução das equações diferenciais de A. Pucher e suas aplicações práticas no que tange ao cálculo dos esforços de membrana nas cascas, cujas superfícies médias são representadas no espaço tridimensional por uma função $z = f(x, y)$, contínua e diferenciável em todos os seus pontos.

1 – CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Se em relação a um sistema triaxial, a superfície média "S" de uma casca puder ser expressa por uma função $z = f(x, y)$, então existe uma função de tensões σ de x, y e do carregamento chamada de função de tensões de Pucher, capaz de definir as três tensões de membrana em todos os pontos da superfície média da casca.

Seja ds um elemento infinitesimal da superfície média S e assim consideraremos ds também contido no plano " π ", o qual é tangente à superfície média dada por $z = f(x, y)$ no ponto P . (Fig. 1a).

A casca encontra-se submetida a um carregamento, cuja intensidade por unidade de área no plano XY é dada através de suas componentes X, Y e Z (Fig. 1b).

Após estas considerações, torna-se fácil escrever as equações que traduzem o equilíbrio estático do elemento ds , ou mais propriamente, o equilíbrio estático da projeção de ds no plano XY , por ser mais simples conforme veremos adiante.

No que se segue, além de considerações de ordem geométrica, adotaremos a seguinte nomenclatura para os esforços que atuam no elemento ds . (Fig. 1a e 1b).

- a) as tangentes T_x e T_y à superfície média $z = f(x, y)$ no ponto P e paralelas aos planos XZ e YZ respectivamente, definem o plano π , o qual é também tangente à superfície média $z = f(x, y)$. T_x e T_y formam com o plano XY , os ângulos α e β tais que,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

- b) N_x é o esforço atuante por unidade de comprimento, na direção da tangente T_x à superfície média $z = f(x, y)$ no ponto P , a qual é paralela ao plano XZ .
- c) N_y é o esforço atuante por unidade de comprimento, na direção da tangente T_y à superfície média $z = f(x, y)$, no ponto P , a qual é paralela ao plano YZ .
- d) N_{xy} e N_{yx} são esforços cortantes atuantes por unidade de comprimento, nas direções das tangentes T_y e T_x respectivamente.
- e) \bar{N}_x é o esforço horizontal atuante por unidade de comprimento na direção do eixo dos X .
- f) \bar{N}_y é o esforço horizontal atuante por unidade de comprimento na direção do eixo dos y .
- g) \bar{N}_{xy} e \bar{N}_{yx} são esforços cortantes horizontais atuantes por unidade de comprimento nas di-

* Eng.^o Civil e Matemático – Eng.^o DNER e Prof. da UNIFOR

reções dos eixos dos Y e dos X respectivamente.

Inicialmente consideraremos o equilíbrio do elemento ds relativamente a sua rotação em torno de um eixo QN, normal ao plano π passando pelo ponto Q pertencente ao mesmo plano. (Fig. 1b). Teremos:

$$\Sigma M_N = (N_{xy} dsy) dsx \cdot \text{sen} \lambda -$$

$$- (Nyx dsx) dsy \text{sen} \lambda = 0$$

$$\therefore Nxy = Nyx \quad \dots (1)$$

Antes porém de escrever as equações de equilíbrio da projeção horizontal do elemento ds relativamente aos eixos coordenados, iremos determinar as relações existentes entre os esforços N_x, N_y e $N_{xy} = N_{yx}$, com esforços horizontais $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy}$ e \bar{N}_{yx} . (Fig. 1b). Lembrando que:

$$\text{tg } \beta = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{vem:}$$

$$N_x \cdot \frac{dy}{\cos \beta} \cdot \cos \alpha = \bar{N}_x \cdot dy$$

$$\therefore N_x = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \bar{N}_x = \frac{\sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \beta}}}{\sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha}}} \cdot \bar{N}_x = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \cdot \bar{N}_x \quad \dots (2)$$

$$N_y = \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \beta = \bar{N}_y \cdot dx$$

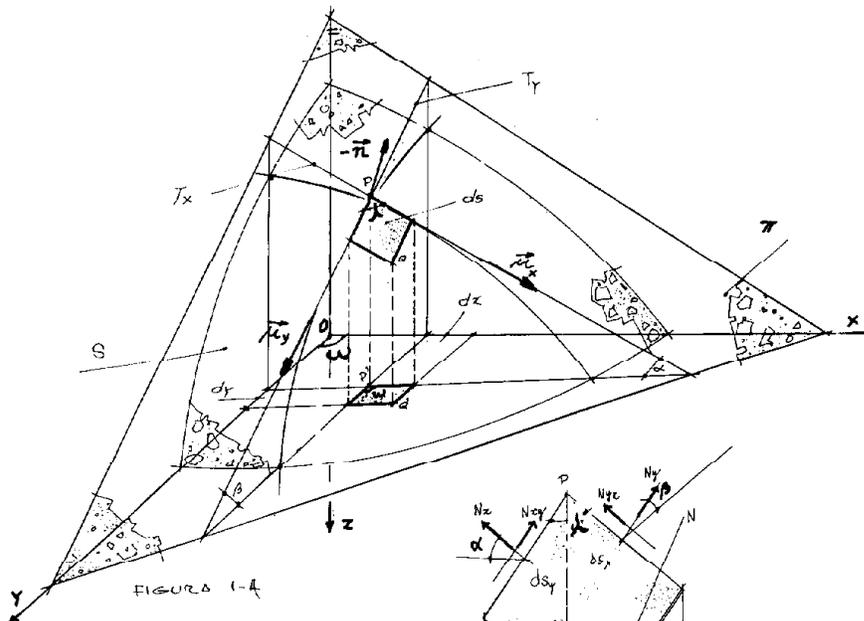
$$\therefore N_y = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \bar{N}_y = \frac{\sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha}}}{\sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \beta}}} \cdot \bar{N}_y = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \cdot \bar{N}_y \quad \dots (3)$$

$$N_{xy} \cdot \frac{dy}{\cos \beta} \cos \alpha = \bar{N}_{xy} \cdot dy \quad \therefore N_{xy} = \bar{N}_{xy}$$

$$N_{yx} \cdot \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \beta = \bar{N}_{yx} \cdot dx \quad \therefore N_{yx} = \bar{N}_{yx}$$

Que em virtude de (1), vem:

$$N_{xy} = N_{yx} = \bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx} \quad \dots (4)$$



DETALHE

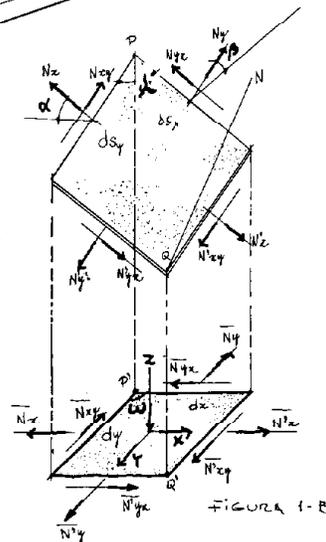


Figura 01

Após estas considerações, torna-se fácil escrever as equações que traduzem o equilíbrio da projeção de ds no plano XY. Teremos. (Fig. 1b).

$$\Sigma F_x = \bar{N}'_x dy - \bar{N}_x dy + \bar{N}'_y dx - \bar{N}_y dx + X dx dy \text{sen } w = 0 \dots \quad (5)$$

$$\Sigma F_y = \bar{N}'_y dx - \bar{N}_y dx + \bar{N}'_x dy - \bar{N}_x dy + Y dx dy \text{sen } w = 0 \dots \quad (6)$$

Observando que:

$$\bar{N}'_x = \bar{N}_x + \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} dx$$

$$\bar{N}'_y = \bar{N}_y + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} dy$$

$$\bar{N}'_{yx} = \bar{N}_{yx} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} dy$$

$$\bar{N}'_{xy} = \bar{N}_{xy} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} dx$$

Substituindo as relações acima em (5) e (6) e tendo em vista (4), vem:

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} + X \operatorname{sen} w = 0 \quad \dots (7)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + Y \operatorname{sen} w = 0 \quad \dots (8)$$

Considerando os componentes dos esforços que atuam em ds ao longo do eixo Z e tendo em vista (2), (3) e (4) vem: (Fig. 1a e 1b).

$$a) N_x \left(\frac{dy}{\cos \beta} \right) \operatorname{sen} \alpha = \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \bar{N}_x \right) \left(\frac{dy}{\cos \beta} \right) \cdot$$

$$\bullet \operatorname{sen} \alpha = \bar{N}_x \operatorname{tg} \alpha \quad dy = \bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} = dy$$

logo a componente por unidade de comprimento é:

$$N_x \frac{\partial z}{\partial x} \quad \dots (9)$$

$$b) N_y \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) \operatorname{sen} \beta = \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \bar{N}_y \right) \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) \cdot$$

$$\bullet \operatorname{sen} \beta = \bar{N}_y \operatorname{tg} \beta \quad dx = \bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \quad dx$$

logo a componente por unidade de comprimento é:

$$\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \quad \dots (10)$$

$$c) N_{yx} \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) \operatorname{sen} \alpha = \bar{N}_{yx} \operatorname{tg} \alpha \quad dx = \bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \quad dx$$

logo a componente por unidade de comprimento é:

$$\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \quad \dots (11)$$

$$d) N_{xy} \left(\frac{dy}{\cos \beta} \right) \operatorname{sen} \beta = \bar{N}_{xy} \operatorname{tg} \beta \quad dy = \bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \quad dy$$

logo a componente por unidade de comprimento é:

$$\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \quad \dots (12)$$

Considerando agora o equilíbrio ao longo do eixo dos Z e tendo em vista (9), (10), (11) e (12), vem:

$$\Sigma F_z = -\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} dy + \left[\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx \right] dy =$$

$$-\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} dx + \left[\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \right] dx =$$

$$-\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} dx + \left[\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dy \right] dx =$$

$$-\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} dy + \left[\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx \right] dy +$$

$$+ Z \, dx \, dy \operatorname{sen} w = 0 \quad \dots (13)$$

Simplificando a expressão (13), vem:

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + Z \operatorname{sen} w = 0 \quad \dots (14)$$

Diferenciando os produtos em (14) e lembrando que $\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx}$, vem:

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= -Z \operatorname{sen} w - \left(\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} -$$

$$- \left(\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

tendo-se em vista (7) e (8), vem:

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= -Z \operatorname{sen} w + X \operatorname{sen} w \frac{\partial z}{\partial x} + Y \operatorname{sen} w \frac{\partial z}{\partial y} \quad \dots (15)$$

Para satisfazer as equações diferenciais (7), (8) e (15), A. Pucher introduziu uma função de tensões $\theta(x, y)$, tal que:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \operatorname{sen} w \int_{x_0}^x X dx \quad \dots (16)$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \operatorname{sen} w \int_{y_0}^y Y dy \quad \dots (17)$$

$$\vec{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \dots (18)$$

Seja $P_0 : (x_0, y_0)$ um ponto fixo pertencente a superfície média $z = f(x, y)$. Substituindo (16), (17) e (18) em (15), vem:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= -Z \operatorname{sen} w + X \operatorname{sen} w \frac{\partial z}{\partial x} + Y \operatorname{sen} w \frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \operatorname{sen} w \int_{x_0}^x X dx +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \operatorname{sen} w \int_{y_0}^y Y dy = \quad \dots (19)$$

$$= \operatorname{sen} w \left(-Z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

$$\int_{x_0}^x X dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int_{y_0}^y Y dy$$

Antes de se considerar o efeito de um carregamento cuja intensidade por unidade de superfície é dada através de suas componentes P_x , P_y e P_z , paralelas aos eixos X , Y e Z respectivamente, vejamos as relações existentes entre estas componentes com as componentes X , Y e Z de um carregamento equivalente por unidade de área no plano XY . Sabe-se que pela equivalência, tem-se:

$$P_x ds = X dx dy \operatorname{sen} w \quad \dots (20)$$

$$P_y ds = Y dx dy \operatorname{sen} w \quad \dots (21)$$

$$P_z ds = Z dx dy \operatorname{sen} w \quad \dots (22)$$

Como $dx dy$ é a projeção de ds no plano XY , temos:

$$dx dy \cdot \operatorname{sen} w = ds \cdot \cos \delta \quad \dots (23)$$

onde $\cos \delta$ é o cosseno diretor do ângulo que o vetor unitário \vec{u} , normal a superfície $Z = f(x, y)$ no ponto P forma com o eixo dos Z , daí a necessidade de posteriormente se determinar $\cos \delta$.

Substituindo-se (23) em (20), (21) e (22), vem:

$$P_x = X \cos \delta$$

$$P_y = Y \cos \delta$$

$$P_z = Z \cos \delta$$

$$\therefore \frac{P_x}{X} = \frac{P_y}{Y} = \frac{P_z}{Z} = \cos \delta \quad \dots (24)$$

Sejam \vec{u}_x e \vec{u}_y (Fig. 1a) vetores unitários nas direções das tangentes T_x e T_y respectivamente, então pela Geometria Analítica, vem:

$$\vec{u}_x = \cos \alpha \vec{i} + 0 \vec{j} + \operatorname{sen} \alpha \vec{k}$$

$$\vec{u}_y = \cos \beta \cos w \vec{i} + \cos \beta \operatorname{sen} w \vec{j} + \operatorname{sen} \beta \vec{k}$$

O produto vetorial entre \vec{u}_x e \vec{u}_y , será:

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ \cos \beta \cos w & \cos \beta \operatorname{sen} w & \operatorname{sen} \beta \end{vmatrix} =$$

$$= -\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \operatorname{sen} w \vec{i} + (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos w - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) \vec{j} + \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} w \vec{k}$$

$$\therefore |\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta +$$

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 w - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta \cdot$$

$$\cos w} = \ell \quad \dots (25)$$

sabe-se também que:

$$|\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y| = |\vec{u}_x| \cdot |\vec{u}_y| \cdot \operatorname{sen} \lambda = \operatorname{sen} \lambda = \ell \quad \dots (26)$$

comparando (25) e (26), vem:

$$\operatorname{sen} \lambda = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta +$$

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 w - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta \cdot$$

$$- \cos w} \quad \dots (27)$$

o vetor unitário \vec{u} normal à superfície $f(x, y)$ no ponto P , será:

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y}{|\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y|} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \operatorname{sen} w}{\ell} \vec{i} +$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos w - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\ell} \vec{j} + \frac{\cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} w}{\ell} \vec{k}$$

logo para o $\cos \delta$, teremos:

$$\cos \delta = \frac{\cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} w}{\ell}$$

que em virtude de (27), vem:

$$\cos \delta = \frac{\cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} w}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot$$

$$\cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 w - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta \cos w}}$$

e que em função das tangentes de α e β , teremos:

$$\cos\delta = \frac{\sin w}{\sqrt{\frac{\sin^2 w}{\cos^2\alpha \cos^2\beta} - 2 \frac{\sin w}{\cos\alpha \cos\beta} \cos w + \sin^2 w}} = \frac{\sin w}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos w + \sin^2 w}} \quad \dots (28)$$

A análise de tensões na casca se faz tendo-se em vista o valor do ângulo λ em cada ponto P da superfície média da casca. (Fig. 1b). Podemos calcular com λ , através da seguinte equação:

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \cos\alpha \cos\beta \cos w + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = |\vec{u}_x| \cdot |\vec{u}_y| \cdot \cos\lambda = \cos\lambda$$

$$\therefore \cos\lambda = \cos\alpha \cos\beta \cos w + \sin\alpha \sin\beta.$$

$$\therefore \cos\lambda = \frac{\text{tg}\alpha \text{tg}\beta + \cos w}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha} \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2\beta}}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \cos w}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Considerando agora somente o efeito do peso próprio q_0 , o qual é constante por unidade de superfície, temos:

$$P_x = P_y = 0 \quad \text{e} \quad P_z = q_0$$

As relações (24), fornecem:

$$X = Y = 0$$

$$Z = \frac{P_z}{\cos\delta} = \frac{q_0}{\cos\delta} \quad \dots (29)$$

substituindo-se (28) em (29), vem finalmente:

$$Z = q_0 \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos w + \sin^2 w}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos w + \sin^2 w}{\sin w} \quad \dots (30)$$

Neste caso, a equação diferencial (19), tendo-se em vista (30) ficará reduzida de acordo com o que se segue:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} :$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -q_0 \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos w + \sin^2 w} \quad \dots (31)$$

2. APLICAÇÕES PRÁTICAS

a) Cascas em forma de parabolóide hiperbólico com carga uniformemente distribuída em projeção horizontal.

Seja por exemplo, uma casca cuja superfície média tem a forma de parabolóide hiperbólico e definida pela equação.

$$z = cxy \text{ sen } w \quad \dots (a) \quad (\text{Fig. 02}).$$

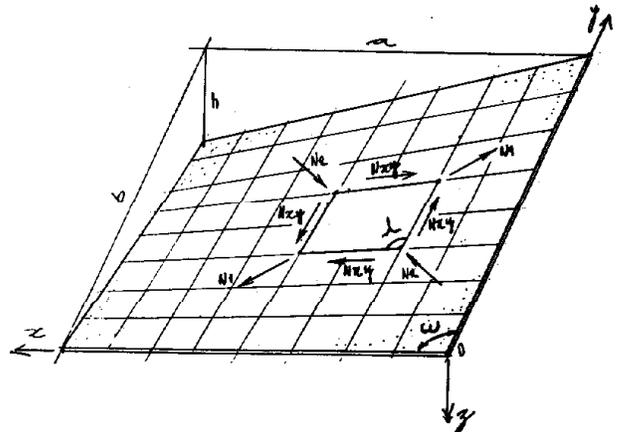


Figura 02

Para $x = a$ e $y = b$ temos que $z = h$, substituindo-se em (a), vem:

$$h = cab \text{ sen } w$$

$$\therefore c = \frac{h}{ab \text{ sen } w}$$

que substituindo-se novamente em (a), vem:

$$z = \frac{h}{ab} xy$$

portanto temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h}{ab} y \quad \dots (b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h}{ab} x \quad \dots (c)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (d)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{h}{ab} \quad \dots (e)$$

Considerando exclusivamente carga vertical uniformemente distribuída em projeção horizontal ($X = Y = 0$ e $Z = q$) e substituindo-se (b), (c), (d) e (e) na equação diferencial dada por (19), vem:

$$-2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -Z \cdot \text{sen } w$$

$$\therefore -2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \cdot \frac{h}{ab} = -Z \cdot \text{sen } w = -q \text{ sen } w$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \frac{ab}{2h} q \text{ sen } w \quad \dots (f)$$

substituindo-se (f) em (18) e tendo em vista (4), vem:

$$\bar{N}_{xy} = N_{xy} = - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = - \frac{ab}{2h} q \text{ sen } w \quad \dots (g)$$

O sentido negativo de N_{xy} está corretamente indicado na Fig 02. A solução geral da equação diferencial dada por (f), é:

$$\theta = \frac{ab}{2h} q \text{ sen } w xy + f_1(x) + f_2(y) \quad \dots (h)$$

sendo $f_1(x)$ e $f_2(y)$ duas funções arbitrárias e determinadas pelas condições de contorno do problema. Levando θ dada por (h) em (16), (17) e (18), vem:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} \quad \dots (i)$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} \quad \dots (j)$$

levando (i) e (j) em (2) e (3), vem:

$$N_x = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} \quad \dots (k)$$

$$N_y = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \cdot \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} \quad \dots (l)$$

que levando em conta as relações (b) e (c), vem:

$$\therefore N_x = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 y^2}{a^2 b^2 + h^2 x^2}} \cdot \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} \quad \dots (m)$$

$$\therefore N_y = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 x^2}{a^2 b^2 + h^2 y^2}} \cdot \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} \quad \dots (n)$$

considerando os bordos livres de esforços normal (Fig. 02), tem-se:

I) Para $x = 0$ e $0 \leq y \leq b$, ocorre $N_x = 0$, que substituindo em (m), vem:

$$0 = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 y^2}{a^2 b^2}} \cdot \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2}$$

$$\text{como } \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 y^2}{a^2 b^2}} \neq 0$$

conclui-se que para $0 \leq y \leq b$, tem-se:

$$\frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} = 0, \text{ que pela expressão (m),}$$

vem: $N_x = 0 \quad \dots (0)$

II) Para $y = 0$ e $0 \leq x \leq a$, ocorre $N_y = 0$ que substituindo em (n), vem:

$$0 = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 x^2}{a^2 b^2}} \cdot \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}$$

$$\text{como } \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 x^2}{a^2 b^2}} \neq 0$$

concluiu-se que para $0 \leq x \leq a$, tem-se:

$$\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = 0 \text{ que pela expressão (n), vem:}$$

$$N_y = 0 \dots (p)$$

As equações (o), (p) e (g) resolvem o problema, ou seja:

$$N_x = N_y = 0, \text{ para toda casca.}$$

$$\text{e } N_{xy} = -\frac{ab}{2h} q \cdot \text{sen } w$$

Na fig. 02 podemos tomar com suficiente aproximação $\lambda \cong \pi/2$ quando se tratar de parabolóide hiperbólico com pequena curvatura (valores pequenos de h quando comparados com a e b), neste caso, a orientação e os valores dos esforços principais, são dados pelas fórmulas já conhecidas da Resistência dos materiais, considerando o estado de tensões relativo ao estado de cisalhamento puro, ou seja:

$$N_1 = \left| N_{xy} \right| = \frac{qab \text{ sen } w}{2h} \quad (\text{Tração})$$

$$N_2 = - \left| N_{xy} \right| = -\frac{qab \text{ sen } w}{2h} \quad (\text{Compressão})$$

A orientação destes esforços está convenientemente representada na Fig. 02.

Objetivando simplificar o processo construtivo no tocante a distribuição das armaduras, é mais conveniente colocá-las segundo as diretrizes retilíneas (Fig. 2). As armaduras de tração A_{sx} e A_{sy} nas direções X e Y respectivamente, são:

$$A_{sxfyd} = A_{syfyd} = \delta_c \cdot N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

considerando $\delta_c = 1,4$, teremos:

$$A_{sx} = A_{sy} = \frac{1,4 \sqrt{2} N_1}{2fyd} = \frac{1,4 \sqrt{2} qab \text{ sen } w}{4hfyd}$$

(por metro linear)

Para o esforço de compressão N_2 (Fig. 02), basta que se verifique a tensão de cálculo do concreto à compressão f_{cd} , ou seja:

$$\frac{\delta_c \cdot N_2}{100 \cdot e} = 0,007 \frac{qab \text{ sen } w}{he} < f_{cd} \quad (\text{kgf/cm}^2)$$

onde e. é a espessura da casca em cm.

Levando em consideração o efeito do peso próprio da casca q_0 constante por unidade de superfície, tem-se:

$$X = Y = 0$$

$$Z = q_0 \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos w + \text{sen}^2 w}{\text{sen } w}}$$

substituindo-se (b) e (c) na expressão acima e tomando-se $w = 90^\circ$, vem:

$$Z = q_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2 b^2} y^2 + \frac{h^2}{a^2 b^2} x^2}$$

A equação diferencial (19) ficará reduzida a seguinte equação:

$$-2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -Z$$

$$\therefore 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \cdot \frac{h}{ab} = q_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2 b^2} y^2 +$$

$$\frac{h^2}{a^2 b^2} x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \frac{q_0}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{ab}{h}\right)^2} \dots (t)$$

de (18) e (4), vem:

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -\frac{q_0}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{ab}{h}\right)^2}$$

a solução da equação diferencial (t) nos permite determinar θ e conseqüentemente os esforços N_x e N_y através das equações (17) e (18). O resultado é o que se segue:

$$N_x = + \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 y^2}{a^2 b^2 + h^2 x^2}} \cdot \frac{q_0 y}{2}$$

$$\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{ab}{h}\right)^2}}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{ab}{h}\right)^2}} \quad (\text{tração})$$

$$N_y = + \sqrt{\frac{a^2 b^2 + h^2 x^2}{a^2 b^2 + h^2 y^2}} \cdot \frac{q_0 x}{2}$$

$$\ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{ab}{h}\right)^2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{ab}{h}\right)^2}} \quad (\text{tração})$$

b) Estruturas compostas por parabolóides hiperbólicos.

As cascas em parabolóides hiperbólicos apresentam vantagens no que tange a simplicidade de cálculo ao seu funcionamento estrutural, a sua beleza arquitetônica, bem como facilidade de execução.

Podemos associar vários elementos de parabolóide hiperbólico, unidos através de geratrizes retifi-

neas comuns e apoiado o conjunto em pilar central, conforme se observa no Terminal Rodoviário Eng. João Tomé em Fortaleza - Ce, cujo cálculo foi de autoria do Eng. Hugo Alcântara Mota. (Fig. 03).

Considere-se quatro parabolóides hiperbólicos equiláteros $w = 90^\circ$, com lados iguais a "a". Sejam eles OFBG, OGCH, OHDE e DEAF, com eixos verticais e vértices respectivos em B, C, D e A. Considerando-se exclusivamente carga uniformemente distribuída em projeção horizontal (Fig. 03 a), temos:

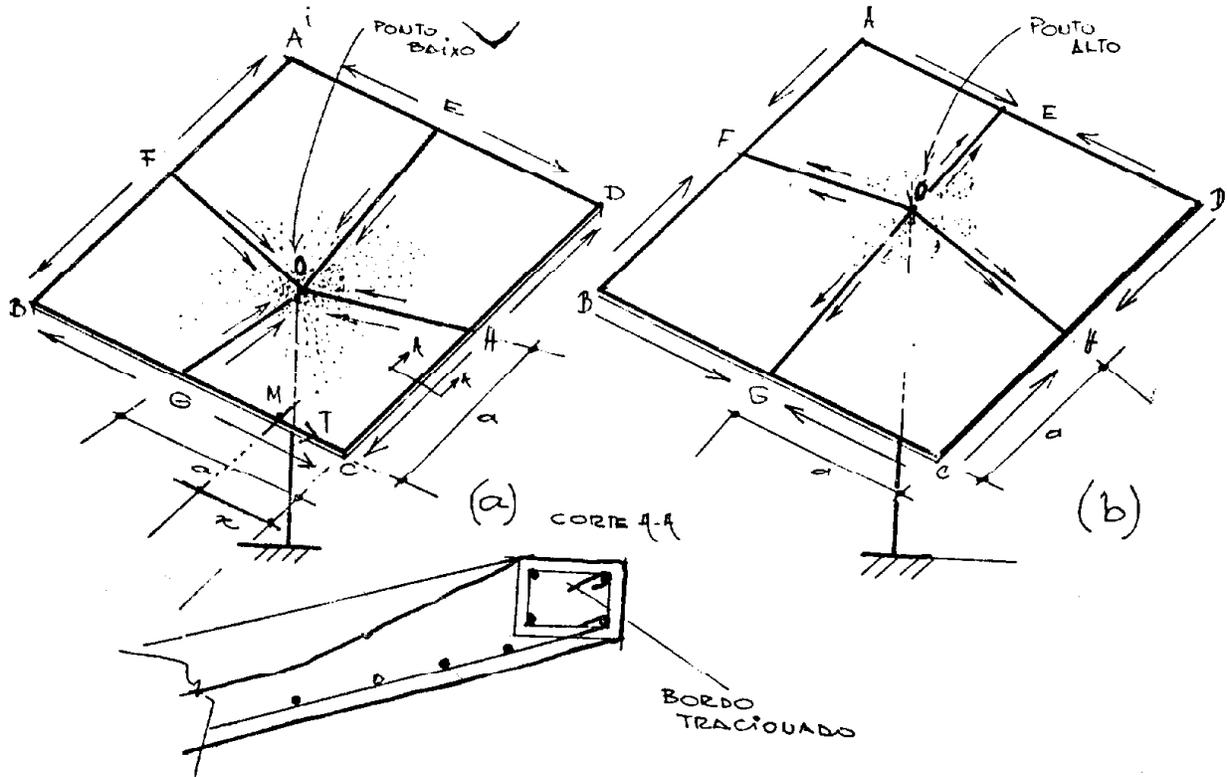


Figura 03

Conforme já vimos, em cada parabolóide um estado de tensões corresponde ao estado de cisalhamento puro.

Se $h > 0$, o contorno externo sendo horizontal, será tracionado (Fig. 02 e 03 a). As arestas inclinadas equilibram-se duas a duas no pilar central e seus esforços são de compressão. Se entretanto, $h < 0$ (Fig. 02 e 03 b), o contorno horizontal agora será comprimido e as arestas centrais tracionadas.

Tendo-se em vista a associação de parabolóides indicadas na Fig. 03 a, o contorno horizontal tracionado será obtido aumentando-se ligeiramente a espessura da casca nas bordas livres e colocando-se armaduras as quais funcionarão como tirantes para equilibrar os esforços tangenciais que se desenvolvem nas respectivas bordas. (Fig. 02 e 03 a). O esforço de tração em um ponto M de abscissa x pertencente ao lado GC, será: (Fig. 03 a).

$$T = \int_0^x |N_{xy}| dx = |N_{xy}| \cdot x$$

sendo

$$|N_{xy}| = \frac{q a b \operatorname{sen} w}{2 h} = \frac{q a^2}{2 h} \quad (a = b), \text{ e } w = 90^\circ$$

vem:

$$T = \frac{q a^2}{2 h} x.$$

Portanto, conclui-se que nos pontos A, B, C e D, estas trações serão nulas ($x = 0$) e máximas em E, F, G e H ($x = a$), com o valor de:

$$T = |N_{xy}| a = \frac{q a^3}{2 h}$$

Analogamente, conclui-se que as ações tangenciais nas geratrizes comuns FO, EO, HO e OG se

somam e deve-se portanto, dispor de elementos estruturais em forma de V, dimensionados para suportar compressão, cujos valores vão aumentando desde zero nos pontos E, F, G e H, até um valor máximo

$$C = 2 \left| N_{xy} \right| \cdot \overline{OG} = \frac{qa^2}{h} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}, \text{ onde}$$

$$\overline{OG} = \sqrt{a^2 + h^2}. \text{ (Fig. 3 a).}$$

O esforço de compressão N_k transmitido ao pilar central em ambos os casos, (Fig. 03 a e 03 b) para efeito de dimensionamento, será:

$$N_k = 2a \cdot 2a \cdot q = 4a^2q$$

c) Casca em forma de parabolóide de revolução com projeção horizontal triangular.

Seja o parabolóide de revolução dado pela equação $z = \frac{x^2 + y^2}{h^2}$ em um sistema de eixos triretangulares. ($w = 90^\circ$) (Fig. 04), considerando exclusivamente carga uniformemente distribuída em projeção horizontal ($x = y = 0$ e $z = q$), teremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{h} \quad \dots (a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{h} \quad \dots (b)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{h} \quad \dots (c)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{h} \quad \dots (d)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \dots (e)$$

substituindo-se (a), (b), (c), (d) e (e) na equação diferencial (19) vem:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \cdot \frac{2}{h} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \cdot \frac{2}{h} = -Z \quad (w = 90^\circ)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{h}{2} q$$

considerando as bordas livres de esforço normal, a solução da equação diferencial acima, é dada por:

$$\theta = -\frac{h}{8} q \left[x^2 + y^2 + \frac{1}{a} (3xy^2 - x^3) \right]$$

onde a é um parâmetro arbitrário, observa-se que para $x = -\frac{a}{3}$ e $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2a}{3} - x \right)$, θ é constante ao longo dos três lados, note-se que, no lado paralelo

ao eixo dos Y têm-se $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$ e portanto, $\bar{N}_x = 0$

ao longo daquele lado. Das expressões (16), (17) e (18), vem:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \dots (g)$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \dots (h)$$

$$\bar{N}_{xy} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad \dots (i)$$

da expressão (f) vem:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{hq}{4} \left(1 + \frac{3x}{a} \right) \quad \dots (j)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{hq}{4} \left(1 - \frac{3x}{a} \right) \quad \dots (k)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{hq}{a} y \quad \dots (l)$$

substituindo-se (j), (k) e (l) em (i), (g), (h) vem:

$$\bar{N}_x = -\frac{hq}{4} \left(1 + \frac{3x}{a} \right)$$

$$\bar{N}_y = -\frac{hq}{4} \left(1 - \frac{3x}{a} \right)$$

$$\bar{N}_{xy} = \frac{3}{4} \cdot \frac{hq}{a} y$$

substituindo-se as relações dadas em (a) e (b), em (2), (3) e (4), vem:

$$N_x = -\frac{hq}{4} \left(1 + \frac{3x}{a} \right) \sqrt{\frac{h^2 + 4x^2}{h^2 + 4y^2}} \quad \dots (m)$$

$$N_y = -\frac{hq}{4} \left(1 - \frac{3x}{a} \right) \sqrt{\frac{h^2 + 4y^2}{h^2 + 4x^2}} \quad \dots (n)$$

$$N_{xy} = \bar{N}_{xy} = \frac{3}{4} \cdot \frac{hq}{a} y \quad \dots (o)$$

As equações (m), (n) e (o) resolvem o problema. Veja os diagramas dos esforços de membrana na (Fig. 05).

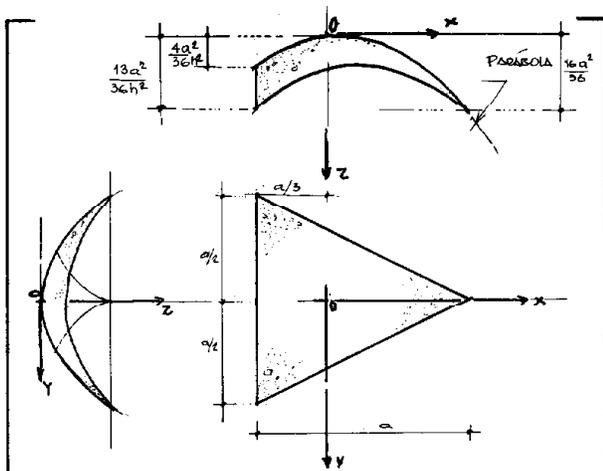


Figura 04

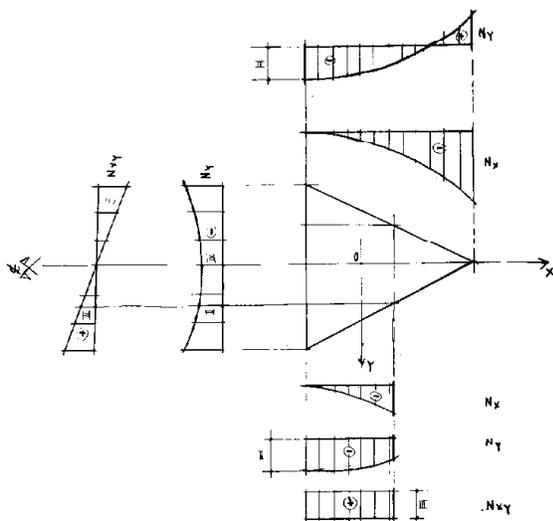


Figura 05

d) Casca em forma de conóide parabólico.

Seja um conóide representado em um sistema de eixos triretangulares ($w = 90^\circ$), sendo gerado por uma reta paralela ao plano XZ apoiando-se no eixo dos Y e sobre uma curva parabólica como diretriz, paralela ao plano YZ. (Fig. 06).

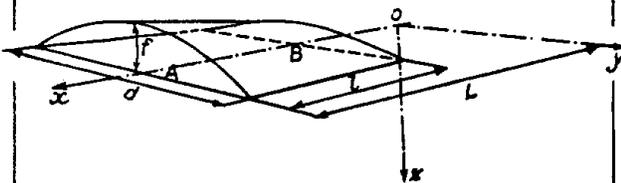


Figura 06

Seja $Z = -f \left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right)$ a equação da parábola diretriz.

f = flecha da diretriz

d = vão do arco
 L = distância da diretriz ao plano YZ
 A equação da superfície média, será:

$$\frac{z}{Z} = \frac{y}{L} \quad (\text{Fig. 06})$$

$$\therefore z = \frac{y}{L} Z$$

$$\therefore z = -\frac{yf}{L} \left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right)$$

Portanto, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f}{L} \left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right) \quad \dots (a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8f}{Ld^2} xy \quad \dots (b)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (c)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8f}{Ld^2} y \quad \dots (d)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8f}{Ld^2} x \quad \dots (e)$$

Considerando-se exclusivamente carga vertical uniformemente distribuída em projeção horizontal ($x = y = 0$ e $z = q$) e substituindo-se (a), (b), (c), (d) e (e) na equação diferencial dada por (19), vem:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \left(\frac{8f}{Ld^2} y\right) - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \cdot \left(\frac{8f}{Ld^2} x\right) = -q$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} y - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} x = -\frac{qLd^2}{8f} \quad \dots (f)$$

A solução da equação diferencial (f) é dada por:

$$\theta = -\frac{qLd^2}{8f} \int \ln y \, dy + f(x)$$

onde $f(x)$ é função somente de x , portanto, temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{qLd^2}{8f} \ln y$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{qLd^2}{8fy}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Pelas equações (16), (17) e (18), teremos:

$$\bar{N}_y = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$\bar{N}_x = \frac{q L d^2}{8 f y}$$

$$\bar{N}_x = \frac{q L d^2}{8 f y}$$

$$\bar{N}_{xy} = 0$$

Pelas equações (2) e (3), podemos escrever que:

$$N_y = \frac{\sqrt{1 + \frac{64 f^2 x^2 y^2}{L^2 d^4}}}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{L^2} \left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right)^2}} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad \dots (g)$$

$$N_x = \frac{\sqrt{1 + \frac{f^2}{L^2} \left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{64 f^2 x^2 y^2}{L^2 d^4}}} \cdot \frac{q L d^2}{8 f y} \quad \dots (h)$$

$$N_{xy} = 0 \quad \dots (j)$$

observando que para $y = L$ e $-d/2 \leq x \leq d/2$ temos $N_y = 0$ (bordos livres de esforço normal) que pela expressão (g) conclui-se que o segundo fator $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

é nulo, e como $f(x)$ independe de y , tem-se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$ para todo y , logo teremos: $N_y = 0$ (para toda casca) $\dots (j)$

As equações (h), (i) e (j) resolvem o problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. A. GUERRIN – **Tratado de Concreto Armado**, 2ª ed., São Paulo, Hermes Editora Limitada, 1983.
02. FABER, Colin – **Las estructuras de Candela**, 2ª ed., México, Editora Compañía Editorial Continental S.A., 1975.
03. FLÜGGE, Wilhelm – **Stress in Shells**, 4ª ed., New York, Springer – Verlag New York Inc., 1967.
04. SALVADORI, Mario – **Structural Design in Architecture**, 2ª ed., United States of American, Prentice-Hall Inc., 1967.
05. S. TIMOSHENKO – **Teoria de Placas Y Laminas**.