

ANÁLISE DE PERCOLAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

* Antônio Nunes de Miranda

** Vanda Tereza Costa Malveira

A aplicação do Método dos Elementos Finitos aos problemas de fluxo nos meios porosos resultou no desenvolvimento de novos programas de computadores. Entre estes, pode ser citado o FPM501, usado neste trabalho, que é uma versão do programa FPM500, desenvolvido por Taylor (1967) e modificado por F. R. Lopes (1974). Sua finalidade é a análise de fluxos bidimensionais ou axissimétricos, estacionários, obedecendo a Lei de Darcy. O FPM501 resolve a equação de Poisson que descreve fluxos estacionários em meios permeáveis e determina a pressão da água em qualquer ponto do perfil de um solo onde ocorre o fluxo.

Neste trabalho, o Programa FPM501 será usado para estudar algumas situações simples. Inicialmente é examinado o fluxo em um permeâmetro de carga constante. Em seguida, o fluxo d'água em barragens homogêneas, isotrópicas e anisotrópicas é modelado. Os resultados obtidos são comparados com aqueles resultantes da aplicação dos métodos clássicos de solução destes problemas.

INTRODUÇÃO

As bases para uma análise racional da percolação em meios porosos foram estabelecidos há mais de um século por Darcy (Stancati, 1984). Desde então, problemas que envolvem escoamento através de meios porosos têm sido analisados pela comunidade científica interessada na Mecânica dos Solos, seja para estabelecer critérios para projetos de obras de terra, seja pelo alto nível de incidência de ruptura de barragens por "piping" (Cruz, 1973).

Atualmente, métodos envolvendo o uso de elementos finitos têm sido usados como uma poderosa ferramenta nos cálculos de variáveis como pressão, velocidade e potencial de fluxo, que são necessários

aos projetos de engenharia (Taylor, 1967). Taylor e Brow (citado por Edgar, 1979) desenvolveram um algoritmo para localizar a superfície freática para fluxos não confinados, isto é, localizar os pontos onde a pressão da água é igual à atmosférica. A aplicação do Método dos Elementos Finitos aos problemas de fluxo nos meios porosos resultou no desenvolvimento de novos programas de computadores. Entre estes, pode ser citado o FPM501 que será usado neste trabalho.

O programa FPM501/PC é uma versão do programa FPM500, desenvolvido por Taylor (1967) e modificado por F. R. Lopes (1974). Sua finalidade é a análise de fluxos bidimensionais ou axissimétricos, estacionários, obedecendo a Lei de Darcy. O FPM501 resolve a equação de Poisson que descreve fluxos estacionários em meios permeáveis e determina a pressão da água em qualquer ponto do perfil de um solo onde ocorre o fluxo. O programa fornece além das ordenadas da superfície freática, as pressões e o potencial em cada nó e a velocidade e direção no centro de cada elemento.

* PHD, Prof. titular de Mecânica dos Solos – UFC
** Eng.^o Civil – DNOCS, aluna do Curso de Mestrado em Recursos Hídricos – UFC, Prof. Colaborador de Barragens – UNIFOR

O PROGRAMA FPM501/PC

O programa utiliza o método dos elementos finitos para determinação das características de fluxos no plano bidimensional, que sejam governados pela Lei de Darcy. Pode ser usado para análises que envolvam situações de fluxos confinados ou não-confinados, regiões planas e axissimétricas, materiais isotrópicos ou anisotrópicos (Lopes, 1974).

Os dados de entrada consistem em informações que já são rotineiramente definidos quando da abordagem do problema por métodos clássicos, tais como nível máximo da água, materiais que constituirão o meio poroso, coeficientes de permeabilidade e pesos específicos.

Aplicado a uma seção transversal da região de fluxo, o programa fornece as coordenadas da superfície freática, bem como dados necessários ao cálculo da velocidade média nas seções verticais a partir da superfície de escoamento, o que possibilita a determinação da descarga através do maciço, fixada uma seção qualquer.

Para se representar a seção no modelo, divide-se a seção em pequenas áreas chamadas elementos. A interseção entre os diversos elementos adjacentes são chamados nós, que receberão uma numeração de acordo com sua posição na malha dos elementos e que definirão no modelo, a posição de cada elemento. A forma ideal para os elementos é a retangular, podendo também ser assumida a forma triangular. A proporção entre os lados do elemento não deve ser superior a seis (Edgar, 1979).

PERMEÂMETRO DE CARGA CONSTANTE

O fluxo através de um permeâmetro de carga constante (Figura 1), por tratar-se de um caso simples de percolação, pode ser resolvido por aplicação de fórmula matemática exata e já foi testado em laboratório. O programa FPM501, usado principalmente para análise de fluxos não-confinados é utilizado neste caso simples para demonstrar sua eficiência no cálculo de vazões através do meio poroso (Das, 1987).

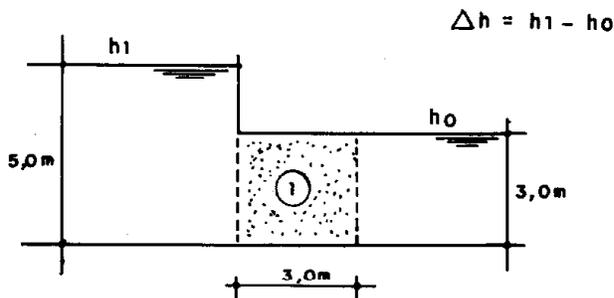


Figura 1 - Esquema do modelo - Permeâmetro de carga constante.

No modelo simulado, a permeabilidade do material poroso é $k = 10^{-3} \text{m/s}$, e este é tratado de forma similar a uma amostra em um permeâmetro. Para se calcular a descarga através da amostra de solo com as características físicas e geométricas definidas na

Figura 1, foi traçada uma malha de elementos finitos com as condições de contorno apresentada na Figura 2.

Esquema idêntico poderá ser utilizado para análise de problemas mais complexos, tais como uma fundação impermeável, desde que os parâmetros dos materiais que a compõe e das camadas confinantes, sejam definidos (Lopes, 1974).

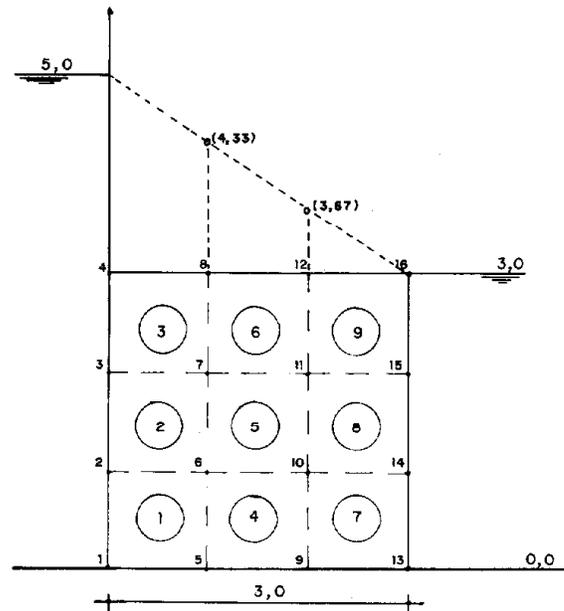


Figura 2 - Malha de elementos e carga hidráulica calculada pelo FPM501.

A saída dos dados apresentada na Tabela 1 fornece a velocidade do fluxo no centro de cada elemento da malha. Como esta malha é uniforme para qualquer seção transversal da amostra, a vazão de é constante como pode ser demonstrado pela aplicação das equações que regem o fluxo em meios porosos.

Através dos dados de velocidade fornecidos pelo programa, determina-se a descarga através do material, multiplicando-se estas velocidades pela área da seção que o meio atravessa.

$$q = vA$$

onde:

$$v = \text{velocidade média através da seção} = 0,6667 \times 10^{-3} \text{m/s}$$

$$A = \text{área da seção transversal} = 3\text{m} \times 1\text{m} = 3\text{m}^2$$

logo,

$$q = 0,667 \times 10^{-3} \times 3 = 2 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$$

Elmt	X-Ord	Y-Ord	1-Flow	2-Flow	Tot. Flow	Direct.
1	.500	.500	.6667E-03	.0000E+00	.6667E-03	.0000
2	.500	1.500	.6667E-03	.0000E+00	.6667E-03	.0000
3	.500	2.500	.6667E-03	.1788E-09	.6667E-03	.0000
4	1.500	.500	.6667E-03	.0000E+00	.6667E-03	.0000
5	1.500	1.500	.6667E-03	.5905E-10	.6667E-03	.0000
6	1.500	2.500	.6667E-03	.2682E-09	.6667E-03	.0000
7	2.500	.500	.6667E-03	.0000E+00	.6667E-03	.0000
8	2.500	1.500	.6667E-03	.5905E-10	.6667E-03	.0000
9	2.500	2.500	.6667E-03	.8940E-10	.6667E-03	.0000

Tabela 1 - Velocidade média na seção transversal

A vazão obtida pela aplicação direta da Lei de Darcy, assumindo como parâmetros geométricos aqueles definidos na Figura 1, será:

$$Q = vA$$

$$\text{sendo, } v = ki = k \frac{\Delta h}{l}$$

$$Q = 10^{-3} \times \frac{2}{3} \times 3 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Da análise dos resultados das vazões, verifica-se a precisão dos cálculos do FPM501. Ainda, a perda de carga ao longo do percurso, indicada na Figura 3, mostra a linearidade esperada, tendo em vista a constância da seção da amostra de solo analisada.

BARRAGEM HOMOGÊNEA ISOTRÓPICA

A definição da superfície freática é o passo inicial para qualquer tipo de análise de fluxo no interior do maciço. Esta superfície é ferramenta básica na solução dos problemas que envolvem fluxos não-confinados em meios permeáveis. No projeto de uma barragem de terra, ela é utilizada na verificação da segurança da obra, no que diz respeito à drenagem interna e à estabilidade propriamente dita (Cruz, 1973).

Para a aplicação do Método dos Elementos Finitos, é feita a modelagem de uma barragem de terra, homogênea, isotrópica, provida de dreno de pé e com a geometria definida na Figura 3. O problema é analisado considerando-se o reservatório cheio e ausência de água superficial a jusante.

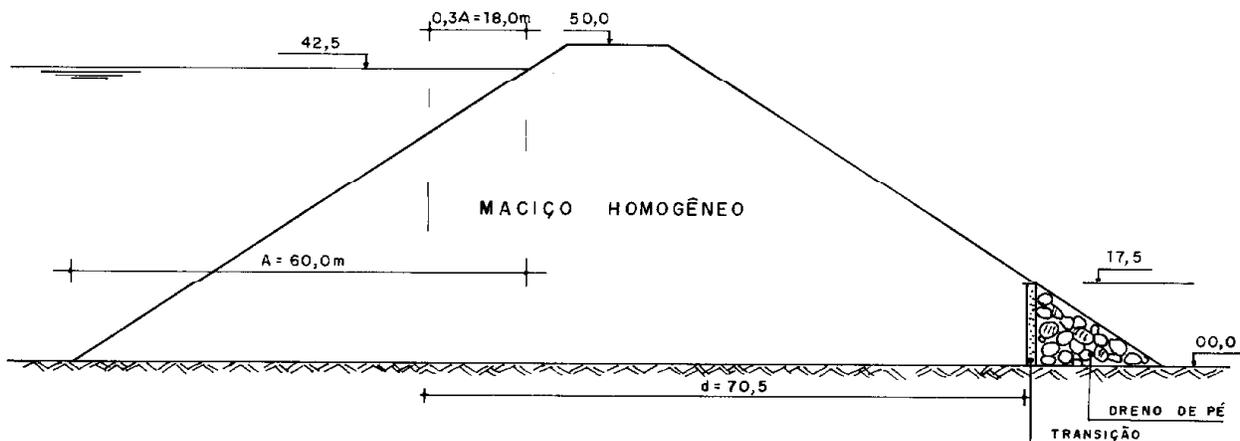


Figura 3 - Esquema do Modelo - Maciço Homogêneo

A aplicação do Programa FPM501 exige a divisão do meio permeável em uma malha de elementos, conforme está detalhado na Figura 4. Às coordenadas de cada nó associam-se informações geométricas e hidráulicas conforme sua posição dentro do maciço, quando conhecidas, e as que não são previamente

conhecidas, são geradas pelo programa e fornecidas nos dados de saída.

A saída de dados, conforme Tabela 2, fornece as coordenadas que permitem a locação da superfície freática, bem como (Tabela 3) a velocidade no centro de cada elemento e as cargas hidráulicas em cada nó.

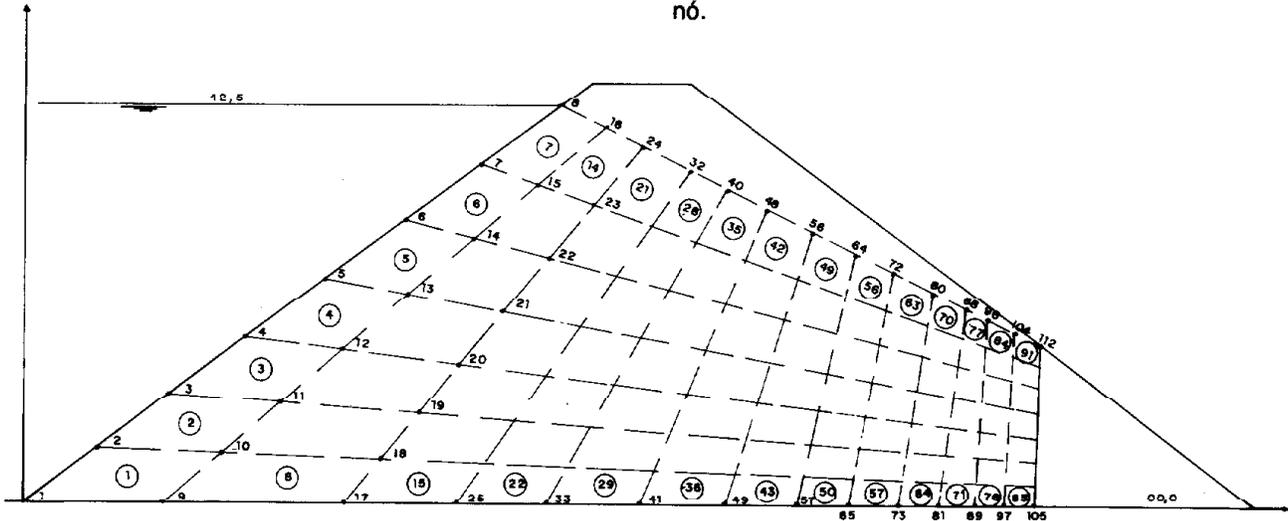


Figura 4 - Malha de Elementos

Tabela 2 – Ordenadas da Superfície Freática

FREE SURFACE LOCATION

Node	X-Ord	Y-Ord	Pressure
16	65.7786	39.8142	-.14345E-03
24	69.6329	37.5625	-.25250E-03
32	74.3861	35.1233	-.39968E-03
40	78.7169	33.0097	-.53806E-03
48	83.5223	30.6726	-.70288E-03
56	87.7870	28.5432	-.81785E-03
64	92.1511	26.2520	-.93765E-03
72	96.4560	23.8333	-.52603E-03
80	101.2150	20.8166	-.23812E-03
88	104.0113	18.8796	-.12670E-01
96	107.5000	16.1745	-.38317E-01
104	110.0000	13.5799	10692E+00
112	112.5000	10.3894	-.63128E-01

Com os dados obtidos na Tabela 3, saída de dados do Programa FPM501, a vazão através do maciço pode ser calculada com a velocidade média de qualquer seção. Uma maneira de obter esta seção é considerar que a mesma é formada pelos elementos 85 a 91 (Figura 4). Sendo a velocidade média nesta seção $0,114 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, e a altura do ponto de surgência dada pela ordenada do nó 112 (Tabela 2), que é 10,389m, tem-se.

$$q = 0,114 \times 10^{-3} \times 10,389 = 1,184 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

A abordagem analítica para definição da superfície freática do maciço apresentado na Figura 3, pode ser feita conforme o método desenvolvido por Arthur Casagrande (ver Figura 5). Neste método a superfície freática é definida por uma parábola e a correção da ordenada do ponto de descarga é feita com o auxílio do gráfico da Figura 5c. A retificação do ponto de entrada da linha freática no maciço é feita conforme indicação da Figura 5a (Van Zyl, 1984).

Tabela 3 – Velocidade Média na Seção Transversal

Elmt	X-Ord	Y-Ord	1-Flow	2-Flow	Tot. Flow	Direct
76	105.487	13.771	.56503E-03	-.42014E-03	.70412E-03	-36.6331
77	105.665	16.266	.51071E-03	-.39406E-03	.64507E-03	-37.6536
78	108.286	1.063	.13539E-02	-.15068E-03	13623E-02	-6.3506
79	108.357	3.188	.12316E-02	-.40307E-03	.12959E-02	-18.1221
80	108.429	5.313	.10529E-02	-.53376E-03	.11805E-02	-26.8824
81	108.500	7.439	.87854E-03	-.59329E-03	.10601E-02	-34.0320
82	108.571	9.564	.72091E-03	-.60331E-03	.94005E-03	-39.9252
83	108.643	11.689	.59167E-03	-.57165E-03	.82271E-03	-44.0139
84	108.714	13.827	.49371E-03	-.51808E-03	.71566E-03	-46.3795
85	111.250	.856	.20461E-02	-.54250E-03	.21168E-02	-14.8494
86	111.250	2.568	.15804E-02	-.73075E-03	.17411E-02	-24.8155
87	111.250	4.280	.12780E-02	-.80634E-03	.15111E-02	-32.2500
88	111.250	5.992	.10494E-02	-.83615E-03	.13418E-02	-38.5467
89	111.250	7.704	.85447E-03	-.83916E-03	.11976E-02	-44.4820
90	111.250	9.417	.67095E-03	-.81569E-03	.10562E-02	-50.5610
91	111.250	11.136	.51348E-03	-.75223E-03	.91078E-03	-55.6822

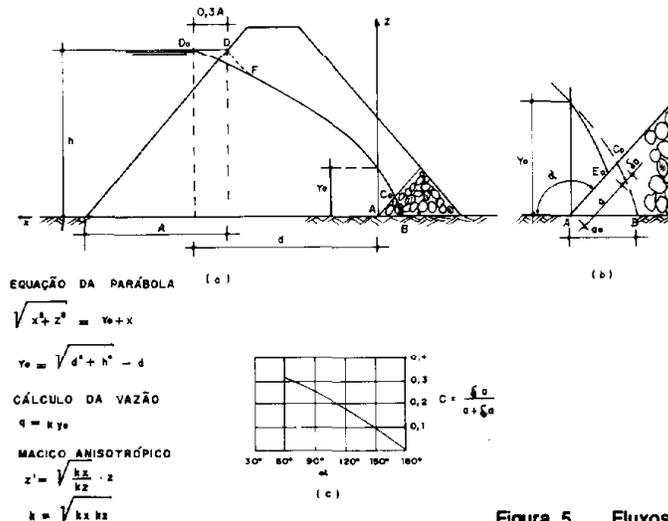


Figura 5 Fluxos Não-Confinaados (Casagrande, 1937)

Os cálculos da localização da superfície freática e da vazão são resumidos a seguir:

CÁLCULO DA PARÁBOLA

$$Y_0 = \sqrt{d^2 + h^2} - d$$

$$d = 70,5\text{m}$$

$$h = 42,5\text{m}$$

$$Y_0 = 11,819\text{m}$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = Y_0 + x$$

$$z^2 = 2y_0x + y_0^2$$

$$z = \sqrt{23,638x + 139,689}$$

Os valores das coordenadas da parábola (x e z) estão indicados na Tabela 4, e sua representação gráfica na Figura 6.

CÁLCULO DA VAZÃO

$$q = kY_0$$

$$k = 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$Y_0 = 10,819\text{m}$$

$$q = 1,182 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

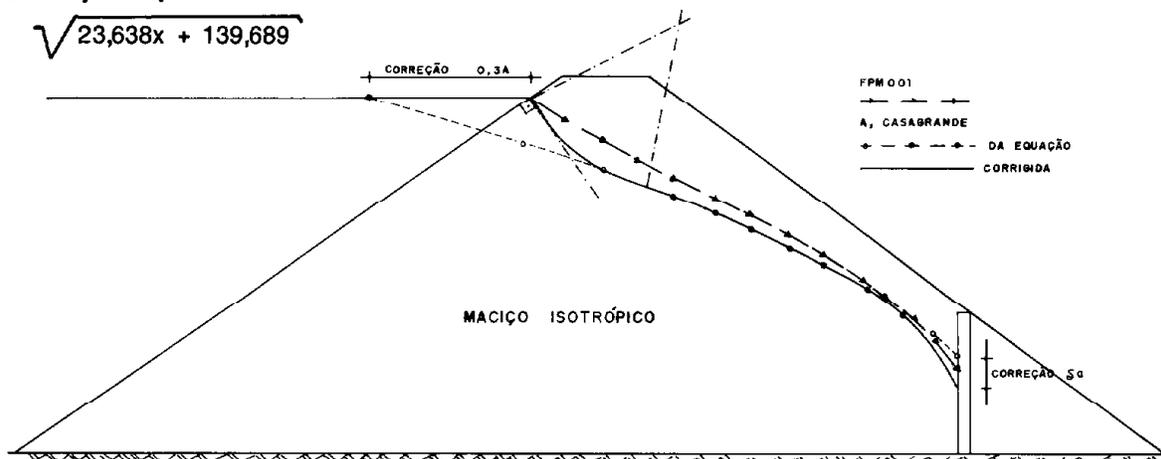


Figura 6 Comparação Entre as Superfícies Freáticas

MACIÇO ISOTRÓPICO

Do exame das superfícies freáticas (Figura 6) e das vazões, calculadas pelo FPM501 e pelo método clássico, verifica-se que existe uma boa aproximação entre estes resultados. As superfícies freáticas apresentam diferenças de cota inferiores a 5% e a divergência nas vazões seria imperceptível nos dispositivos de mensuração usados no campo.

TABELA 4
COORDENADAS DAS SUPERFÍCIES FREÁTICAS

x (cm)	z (cm)		
	A. Casagrande	FPM 501	A. Casagrande Corrigida
70,5	42,5	42,5	42,5
52,0	37,0	42,5	42,5
47,0	35,4	39,5	37,0
43,0	34,0	37,5	34,5
34,0	30,7	33,0	30,7
29,0	28,7	30,5	28,7
20,0	24,7	26,0	24,7
16,0	22,8	24,0	22,8
8,0	18,1	18,5	18,1
6,0	16,8	17,0	17,0
3,0	14,5	14,0	13,0
0,0	11,8	10,4	9,5

BARRAGEM HOMOGÊNEA ANISOTRÓPICA

A definição da superfície freática e o cálculo da vazão através de um maciço permeável, foram feitos no caso anterior considerando o material do maciço isotrópico, e como tal, a permeabilidade em todas as direções seria constante. Na prática, sabe-se que não são encontradas estas condições quer em maciços naturais, quer artificiais. Na análise aqui realizada a permeabilidade horizontal foi assumida como nove vezes a permeabilidade vertical ($K_x = 9K_z$). Para aplicação do método de Arthur Casagrande recorre-se à teoria da Seção Transformada (Van Zyl, 1984), o que no problema presente resume-se na substituição das ordenadas z da Figura 5, por z' conforme definido abaixo.

$$z' = \sqrt{\frac{k_x}{k_z}} z = \sqrt{9} z = 3z$$

onde,

k_x = permeabilidade na direção horizontal,
 k_z = permeabilidade na direção vertical.

A rede de elementos finitos para definição da entrada de dados no Programa FPM501 é a mesma do item anterior (Figura 4).

As considerações com respeito à anisotropia do maciço são introduzidas nos dados de entrada, quan-

do da definição da permeabilidade nas duas direções principais.

A saída de dados indica a locação da superfície freática através das ordenadas da Tabela 5 e a descarga através do maciço pode ser calculada com o auxílio da Tabela 6, de onde são obtidas as velocidades médias por elemento.

Com os dados da Tabela 6, a vazão através do maciço pode ser calculada a partir da velocidade média em uma seção transversal ao fluxo. Considerando a seção vertical formada entre os elementos 85 e 91 (Figura 4), teremos uma velocidade média de $0,8872 \times 10^{-3} \text{m/s}$. A altura do ponto de surgência que é a ordenada do nó 112 (Tabela 5) é 19,1161m. Logo a descarga através do maciço será:

$$q = 0,8872 \times 10^{-3} \times 19,1161 = 1,696 \times 10^{-2} \text{m}^3/\text{s}$$

Tabela 5 – Ordenadas da Superfície Freática
FREE SURFACE LOCATION

Node	X-Ord	Y-Ord	Pressure
16	66.4105	40.3444	.20266E-02
24	70.5025	38.5988	.36261E-02
32	75.4890	36.6984	.53953E-02
40	79.8829	35.0294	.69292E-02
48	84.8962	33.0522	.89768E-02
56	89.0760	31.3075	.10757E-01
64	93.5754	29.3060	.13067E-01
72	98.0167	27.1803	.15789E-01
80	102.9764	24.5938	.19673E-01
88	105.9027	22.9360	.22839E-01
96	107.5000	21.9854	.30591E-01
104	110.0000	20.4192	.40649E-01
112	112.5000	19.1161	.68679E-01

Tabela 6 – Velocidade Média na Seção Transversal

Elmt	X-Ord	Y-Ord	1-Flow	2-Flow	Tot. Flow	Direct.
76	106.230	17.648	.57796E-03	-.28685E-03	.64523E-03	-26.3956
77	106.545	20.863	.56922E-03	-.36588E-03	.67667E-03	-32.7315
78	108.286	1.514	.67077E-03	-.40510E-04	.67199E-03	- 3.4560
79	108.357	4.543	.66561E-03	-.16339E-03	.68537E-03	-13.7915
80	108.429	7.572	.65044E-03	-.25015E-03	.69688E-03	-21.0365
81	108.500	10.601	.63135E-03	-.30848E-03	.70268E-03	-26.0407
82	108.571	13.630	.61217E-03	-.34238E-03	.70141E-03	-29.2179
83	108.643	16.659	.59642E-03	-.35298E-03	.69304E-03	-30.6136
84	108.714	19.697	.59151E-03	-.37304E-03	.69932E-03	- 32.2381
85	111.250	1.412	.86708E-03	-.38285E-03	.94785E-03	-23.8233
86	111.250	4.236	.78642E-03	-.48101E-03	.92186E-03	-31.4519
87	111.250	7.060	.72458E-03	-.53925E-03	.90322E-03	-36.6573
88	111.250	9.884	.67390E-03	-.57159E-03	.88366E-03	-40.3041
89	111.250	12.708	.62909E-03	-.58450E-03	.85872E-03	-42.8957
90	111.250	15.532	.58577E-03	-.57829E-03	.82313E-03	-44.6315
91	111.250	18.369	.51056E-03	-.70705E-03	.87212E-03	-54.1673

A solução analítica pelo método de A. Casagrande é aplicada ao problema, após as correções devidas à anisotropia do solo. Os cálculos da localização da superfície freática e da vazão são resumidos a seguir:

CÁLCULO DA PARÁBOLA

$$Y_o' = \sqrt{d^2 + h^2} - d \quad h' = \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} h$$

$$d = 70,7\text{m}$$

$$h = 127,5\text{m}$$

$$Y_o' = 75,19\text{m} \quad ; \quad Y_o = 25,06\text{m}$$

$$Y_o + x = \sqrt{x^2 + z'^2}$$

$$z'^2 = \frac{2Y_o'x + Y_o'^2}{\frac{K_x}{k_z}}$$

$$z' = \sqrt{\frac{150,39x + 5654}{9}}$$

CÁLCULO DA VAZÃO

$$q = k Y_o$$

$$k = k_x k_z$$

$$k_x = 0,009\text{m/s}$$

$$k_z = 0,001\text{m/s}$$

$$Y_o = 25,06\text{m}$$

$$q = 7,519 \times 10^{-2} \text{m}^3/\text{s}$$

CÁLCULO DA VAZÃO CORRIGINDO-SE O VALOR DE Y_o PELO GRÁFICO DE A. CASAGRANDE (Figura 5c)

$$Y_{oc} = (1 - c) Y_o$$

$$q = K Y_{oc}$$

$$k = k_x k_z$$

$$k_x = 0,009\text{m/s}$$

$$k_z = 0,001\text{m/s}$$

$$Y_o = 25,06\text{m}$$

$$c = 0,26$$

$$Y_{oc} = 18,544\text{m}$$

$$q = 7,519 \times 10^{-2} \text{m}^3/\text{s}$$

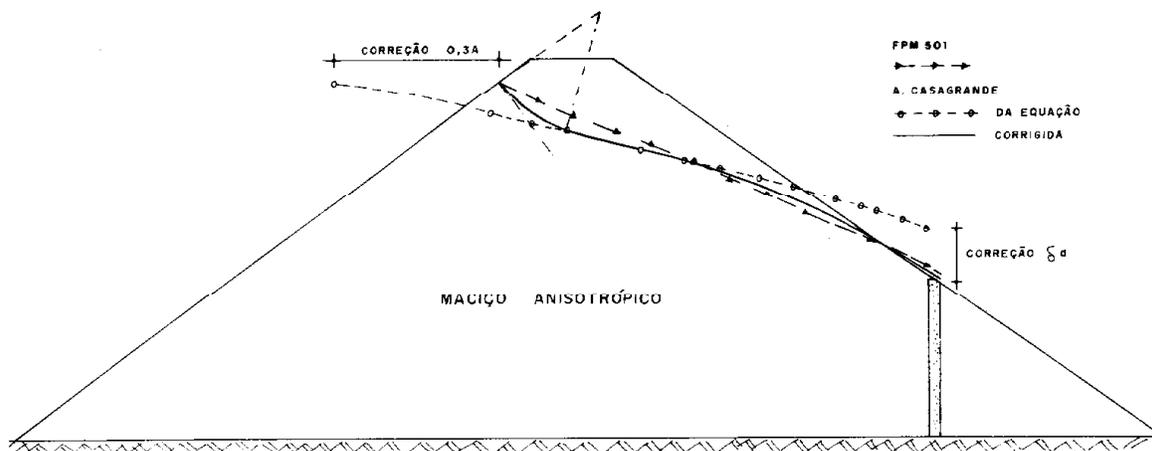


Figura 7 Comparação entre as superfícies freáticas

Tabela 7 – Coordenadas das Superfícies Freáticas

x (cm)	z (cm)		
	A. Casagrande	FPM 501	A. Casagrande Corrigida
70,5	42,5	42,5	42,5
52,0	38,7	42,5	42,5
47,0	37,6	40,6	38,7
43,0	36,7	39,0	37,0
34,0	34,6	35,5	34,6
29,0	33,4	33,5	33,0
20,0	31,0	29,6	30,0
16,0	30,0	28,0	28,5
8,0	27,6	23,0	24,5
6,0	27,0	22,3	23,0
3,0	26,0	20,8	21,0
0,0	25,0	19,1	18,5

Os resultados relativos à superfície freática estão plotados na Figura 7 e os relativos à descarga através do maciço estão indicados acima. As diferenças de cota das superfícies freáticas são inferiores a 5%. Ambas as superfícies atingiram o talude de jusante acima do dreno, o que mostra a importância de se levar em conta a anisotropia do maciço compactado no dimensionamento do sistema de drenagem da barragem. No que diz respeito ao cálculo da descarga observa-se que os resultados se aproximam quando se calcula a vazão com o Y_0 corrigido, embora o método de A. Casagrande não indique este procedimento. Assim, a aplicação de um ou outro método incorrerá numa diferença da ordem de 8,5%.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi utilizado o Método dos Elementos Finitos na análise de percolação em meios permeáveis. Este método numérico que evoluiu juntamente com a informática, é aqui apresentada com

o uso do Programa FPM501 que se aplica a percolação em meios porosos confinados e não confinados.

Foram estudadas a descarga e a superfície freática que limita o fluxo. Ambas podem ser determinadas com o uso de métodos clássicos respaldados em experiências de laboratório ou de campo. Como a metodologia clássica implica em considerável dispêndio de tempo de cálculo, procurou-se mostrar aqui uma outra, mais rápida, com resultados confiáveis, de fácil aplicação prática e adaptável a qualquer tipo de problema.

Os modelos simulados envolvem situações simples e os resultados analisados permitem as seguintes conclusões:

- A descarga através de um permeâmetro de carga constante calculada pela aplicação direta da Lei de Darcy, apresenta o mesmo resultado da aplicação do Método dos Elementos Finitos
- Foi analisado o fluxo através de uma barragem de terra homogênea isotrópica. O método clássico utilizado foi o desenvolvido por Arthur Casagrande. Comparando os resultados obtidos com a aplicação do Método dos Elementos Finitos verifica-se um desvio máximo da ordem de 5% nas ordenadas da superfície freática e uma diferença desprezível no cálculo das descargas.
- Ainda foi analisado o fluxo através de uma barragem de terra homogênea anisotrópica. O método clássico utilizado foi o desenvolvido por Arthur Casagrande e os resultados da aplicação do FPM501 atestam a confiabilidade do Método dos Elementos Finitos para a análise em pauta. Os resultados apresentam o desvio máximo da ordem de 8,5% no cálculo das descargas e de 5% nas ordenadas da superfície freática.
- No caso da barragem anisotrópica, a linha freática atingiu o talude de jusante acima do dreno, o que indica a impor-

tância das análises de percolação no dimensionamento do sistema de drenagem interna. Se o modelo simulado correspondesse a uma situação real, ter-se-ia um problema de surgência no talude de jusante, o que poderia comprometer a segurança do maciço.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- EDGAR, T., User's Manual for CFLOW.3 – A Finite Element Groundwater Based on CFLOW. Bureau of Mines United States Department of the Interior Washington, 1979.
- CRUZ, P. T da. "Estabilidade de Taludes" Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1973.
- DAS, B. M. "Advanced Soil Mechanics". McGraw-Hill International Editions, Singapore, pág. 65 – 156, 1987.
- GUIDICINI, G. e NIEBLE, C. M., "Estabilidade de Taludes Naturais e de Escavação". Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, pág. 116 – 120, 1984.
- LOPES, F. R. "Análise do Controle D'água em Escavações pelo Método dos Elementos Finitos". Tese de Mestrado, COPPE, Rio de Janeiro, 1974.
- STANCATI, G. "Redes de Fluxo". Universidade de São Carlos, São Paulo, 1984.
- TAYLOR, R. L. and BROW, C. B. "Darcy Flow Solutions With a Free Surface". Journal of Hydraulics Division, A.S.C.E., Vol. 93, nº HY2, 1967.
- ZYL, D. van, "Applied Groundwater and Seepage Analysis", Colorado State University, Fort Collins, 1984.