ECOLOGIA:
A MATEMÁTICA DA LUTA PELA SOBREVIVÊNCIA

* Ulisses S. Melo

Este trabalho mostra, utilizando um simples sistema de equações diferenciais, um modelo matemático que fornece suporte científico às conclusões dos estudos ecológicos sobre equilíbrios populacionais.

Summary

This paper shows, working on a simple system of differential equations, a mathematical model which gives scientific support to the results from ecological studies on populations equilibria.

INTRODUÇÃO

Ecologia é usualmente definida como o estudo das interações entre organismos e o meio ambiente. *Meio ambiente* aqui é tomado em sentido amplo e engloba todas as cousas ou fatores que, de alguma forma, se relacione com o organismo; inclui não somente fatores físicos como luz, temperatura ou umidade, mas também seus parasitas, predadores, presas, competidores, etc. Tudo que não for parte intrínseca do organismo mas tiver a ele relacionado é parte de seu meio ambiente.

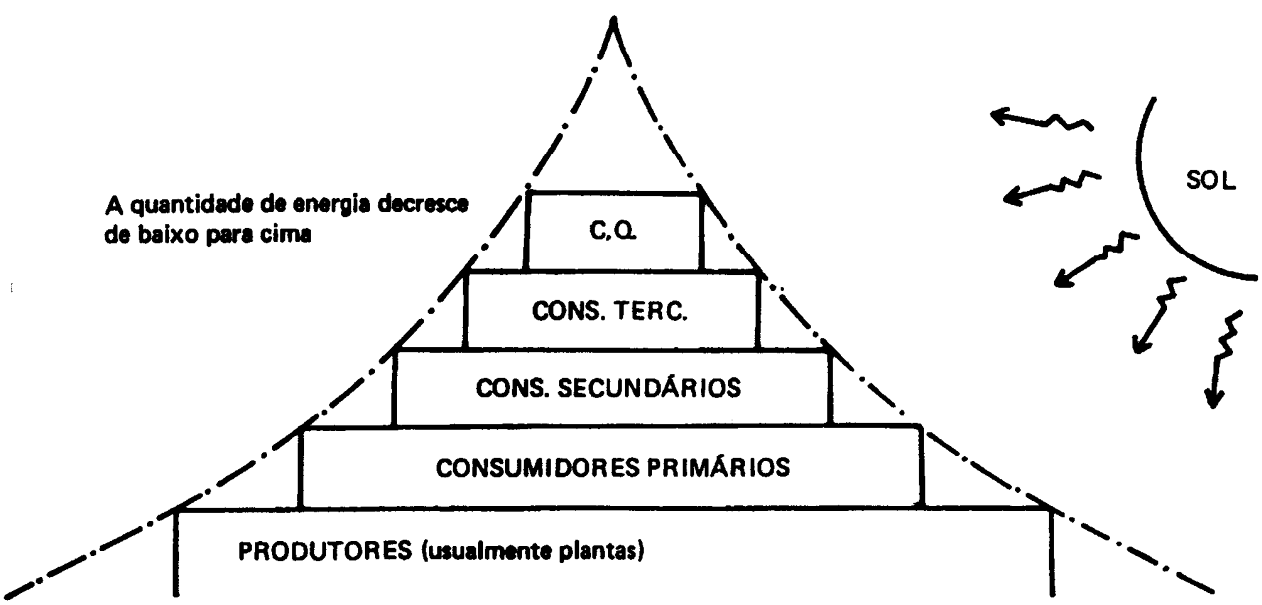

Figura 01 - A cadeia Alimentar

* *Médico e Matemático, professor titular da UNIFOR e professor adjunto da UFC*

Como sabemos, a vida se apresenta sob diferentes níveis de organização tais como molecular, celular, tecidos, órgãos, sistemas e organismos. Apesar de que a ecologia se vê frequentemente envolvida com fenômenos em qualquer dos níveis entrópicos agora citados (por exemplo, as interações osmóticas de um organismo com seu meio ambiente), estaremos aqui primariamente devotados a andares mais macroscópicos: população, comunidade e ecossistema. Chamamos de *população* a um conjunto de indivíduos da mesma espécie vivendo na mesma área geográfica, enquanto que *comunidade* é o conjunto de todas as populações que vivem numa mesma área e *ecossistema* designa as comunidades e seus ambientes físicos considerados juntos.

A vida depende, em última análise, das radiações solares. (Não é à toa que os antigos adoravam o Deus Sol). Os chamados *produtores* utilizam a energia solar na fabricação de seu próprio alimento e, a partir daí, outros organismos, os *consumidores primários,* obtêm a energia necessária comendo produtores, e a cadeia se segue. A sequência de organismos através dos quais existe o fluxo de energia da comunidade é o que se denomina de cadeia alimentar, a qual pode ser esquematizada como uma pirâmide onde cada nível é usualmente denominado pelos ecologistas de nível trófico (ver Fig. 01).

Assim *organismos vivem de organismos* e o que se chama de *teia alimentar* de uma comunidade é um diagrama mostrando *quem se alimentá de quem* na comunidade. Portanto, excetuando eventualmente os produtores, todo organismo é predador e presa ao mesmo tempo (usualmente de diferentes espécies). Nosso objetivo neste trabalho é desenvolver um modelo matemático para a relação presa-predador, o que será levado a efeito no próximo parágrafo.

Tentaremos seguir à risca as etapas já anteriormente apresentadas e discutidas quando da tentativa de elaborar modelos, quais sejam os processos de filtração, solução, tradução e colagem. (*Ver Biomatemática: Métodos e Objetivos,* do mesmo autor na revista TECNOLOGIA, publicada pela Universidade de Fortaleza-UNIFOR, no. 11, páginas 09 a 17, de 1990).

UM MODELO PARA A RELAÇÃO PRESA- PREDADOR

Consideremos duas espécies de animais α e β onde uma se alimenta da outra, digamos β se alimenta de α (β e α poderiam ser respectivamente raposas e coelhos, por exemplo). Dadas as taxas naturais de crescimento e as taxas resultantes da interação das duas espécies, o que se pode dizer sobre seus crescimentos populacionais?

Como é de conhecimento geral, equações diferenciais são ótimos utensílios para descrever a mudança de uma dada variável no decorrer do tempo. Daí porque nosso modelo será baseado nestas equações.

Por simplicidade, vamos assumir que a população de α' s é o suprimento total e único da população β. Agora, se x(t) denota o número de indivíduos α no tempo **t** e não existem β's para caçá- los, a taxa de crescimento da população de α's será proporcional, podemos supor, ao número existente, isto é,

$$\frac{dx}{dt} \propto x \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = Ax \qquad \text{(I)}$$

A constante de proporcionalidade **A** que aparece em (I) é uma medida da prolificidade da espécie α, e visto que não há β' s para diminuir seu número populacional, segue-se que A é positivo.

Por outro lado, se y(t) é o número de β' s no tempo t e não existe α' s para comer, então os β' s tardarão por se exterminar numa taxa de decrescimento populacional proporcional ao número dos mesmos, isto é.

$$\frac{dy}{dt} \propto y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -Dy \qquad \text{(II)}$$

Por considerações completamente análogas, **D** é uma constante positiva que mede o quão rápido a população β desapareceria na contigência de não existir α para lhe suprir energia.

Agora, uma vez que o número de α' s que serão devorados pelos β' s é proporcional ao número de encontros entre predador e presa e este número de encontros é, de conformidade com a estatística, proporcional ao produto **xy**, temos que o número de α' s que alimentarão β' s é proporcional a **xy**, isto é, a taxa de variação da população α não poderá ser representada somente pela equação (I) já que devemos acrescentar uma parcela perturbadora decorrente da queda populacional resultante do ataque dos predadores, a relação ficará então:

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy \qquad \text{(III)}$$

e, raciocínio similar transforma (II) em

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy \qquad \text{(IV)}$$

onde **A,B,C** e **D** são números reais positivos. Nosso modelo consiste assim de sistema de equações diferenciais, mais precisamente o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (A - By)\,x \\ \dfrac{dy}{dt} = (Cx - D)y \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

que é usualmente denominado de *Equações Diferenciais Presa-Predador de Volterra-Lotka,* uma homenagem à aqueles que primeiro se preocuparam com o problema.

UMA SOLUÇÃO PARA O MODELO

No sentido de cumprir a segunda etapa do processo de modelagem, precisamos entender o que encerra o sistema (V) que, neste trabalho, chamaremos de sistema V-L. Para isto, observemos inicialmente que

$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } y = \frac{A}{B} \qquad \text{(VI)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{D}{C} \qquad \text{(VII)}$$

e, então, vamos dividir o primeiro quadrante em quatro subquadrantes por meio das retas y=A/B e x=D/C para obtermos uma solução de (V), como é nossa pretensão.

Precisamos observar em quais subquadrantes as taxas de variações de α e β são positivas e negativas, dado que isto acarretará no crescimento ou decrescimento de cada uma das populações em consideração. Notemos que:

$$\frac{dy}{dx} > 0 \rightarrow C - \frac{D}{x} > 0 \text{ e } \frac{A}{y} - B < 0 \text{ ou}$$

$$C - \frac{D}{x} < 0 \text{ e } \frac{A}{y} - B > 0 \qquad \text{(VIII)}$$

já que, do sistema V-L facilmente obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(Cx - D)\,y}{(A - By)\,x} \qquad \text{(IX)}$$

De (VIII) temos que

$$\frac{dy}{dx} > 0 \rightarrow x > \frac{D}{C} \text{ e } y < \frac{A}{B} \text{ ou}$$

$$x < \frac{D}{C} \text{ e } y > \frac{A}{B} \qquad \text{(X)}$$

ou seja, y é crescente como função de x nos subquadrantes II e IV. (XI)

De modo completamente semelhante, podemos concluir que y é decrescente em relação a x nos subquadrantes I e III. (XII)

Por outro lado, (IX) pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C - (D/x)}{(A/y) - B}$$ e desta temos as implicações

$$\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow x = D/C \qquad \text{(XIII)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \infty \quad y = A/B \qquad \text{(XIV)}$$

e também a equação

$$\frac{A}{y}\,dy - Bdy - Cdx + \frac{D}{x}\,dx = 0$$

que, integrando, nos fornece

$$A \ln y - By - Cx + D \ln x = \text{constante}$$

ou seja,

$$By - \ln y^A + Cx - \ln x^D = \text{constante}$$

de onde, obtemos então

$$\frac{e^{By}}{y^A} = K \cdot \frac{x^D}{e^{Cx}} \qquad \text{(XV)}$$

onde **K** é uma constante positiva.

No sentido de facilitar nossos futuros cálculos, façamos

$$Y(y) = \frac{e^{By}}{y^A} \quad e \quad X(x) = \frac{x^D}{e^{Cx}} \qquad \text{(XVI)}$$

Cabe notar que, para cada constante K positiva; a curva solução que estamos a buscar é dada por Y=KX, e para obtê-la, necessitamos estudar as funções Y(y) e X(x), o que significa, para efeitos práticos, esboçar seus gráficos. Para tal finalidade, comecemos observando que

$$Y'(y) = \frac{Be^{By} \cdot y^A - A \cdot y^{A-1} \cdot e^{By}}{y^{2A}} \qquad \text{(XVII)}$$

e consequentemente

$$Y'(y) = 0 \rightarrow y = A/B \qquad \text{(XVIII)}$$

Note que (XVII) pode ser escrita como

$$Y'(y) = e^{By}\left(\frac{B}{y^A} - \frac{A}{y^{A+1}}\right) \qquad \text{(XIX)}$$

e desta segue-se que

$$Y''(y) = Be^{By}\left(\frac{B}{y^A} - \frac{A}{y^{A+1}}\right) + e^{By} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{-AB}{y^{A+1}} + \frac{A(A+1)}{y^{A+2}}\right) \qquad \text{(XX)}$$

de onde facilmente se tem Y''(A/B) > 0 garantindo que Y(y) tem um mínimo em y=A/B.

De (XVI) temos as informações

$\lim_{y \to \infty} Y(y) = \infty$ e $\lim_{y \to 0} Y(y) = \infty$ as quais, assim, nos dão condições de esboçar o gráfico de Y(y):

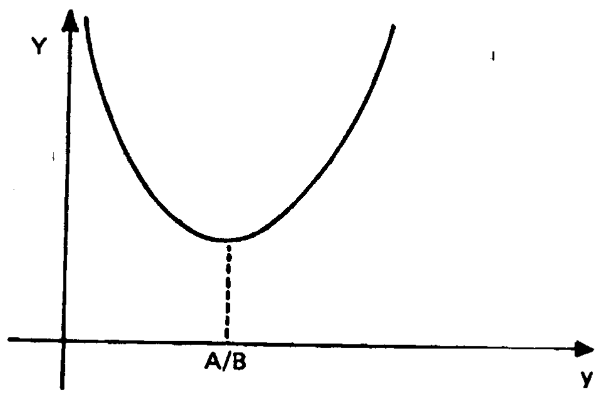

Figura 02 – O Gráfico de Y(y)

Por outro lado,

$$X'(x) = \frac{Dx^{D-1} \cdot e^{Cx} - Ce^{Cx} \cdot x^{D}}{e^{2Cx}} \qquad \text{(XXI)}$$

e daí $X'(x) = 0 \rightarrow x = D/C$ (XXII)

e simples matéria de cálculo fornece $X''(D/C) < 0$, informando-nos que $X(x)$ tem ponto de máximo em $x = D/C$. Além disto, de (XVI) temos $\lim_{x \to \infty} X(x) = 0$ e como $X(x)$ passa na origem, o gráfico de $X(x)$ é:

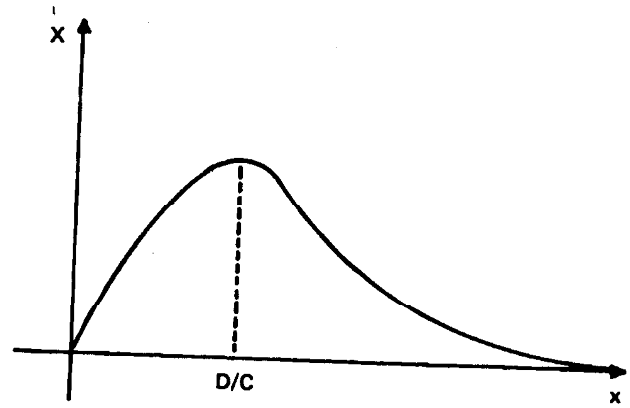

Figura 03 - O Gráfico X(x)

E com estes gráficos em mãos, podemos esboçar o gráfico-solução Y = KX, que é o nosso objetivo:

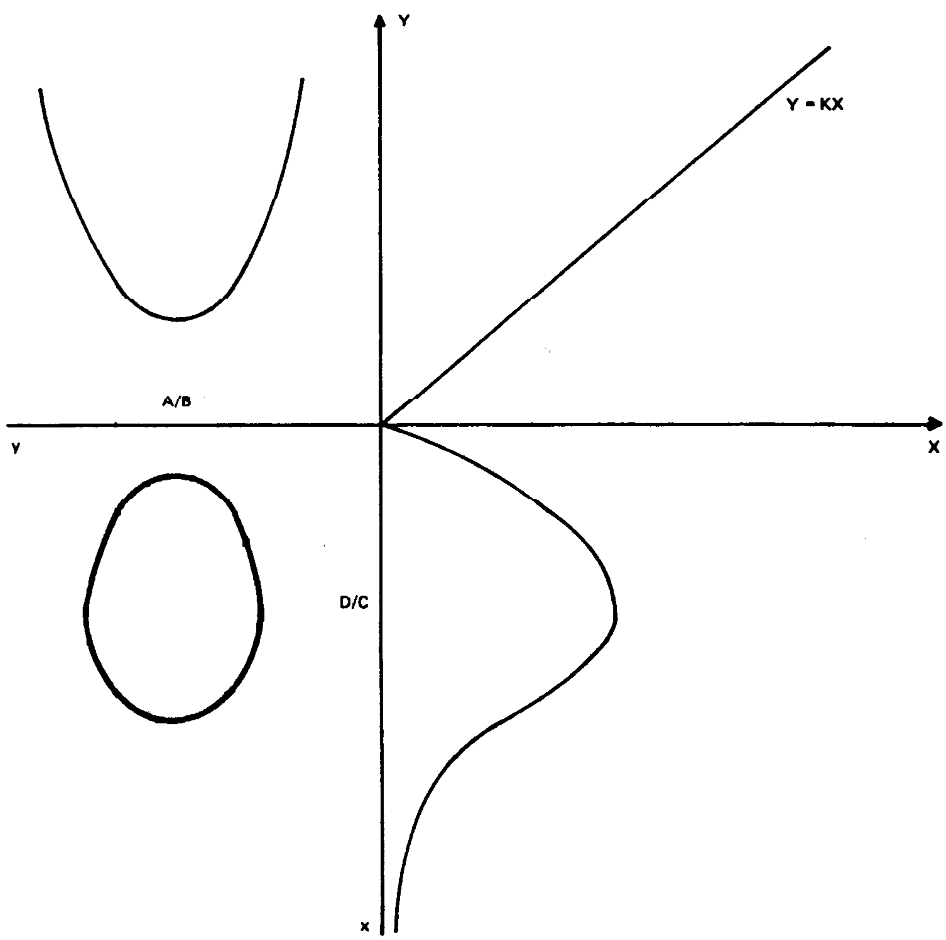

Figura 04 - Método para obter a curva-solução do sistema V-L

Então, uma curva-solução típica das Equações Presa-Predador V-L é dada pela figura abaixo, usualmente chamada Curva do Equilíbrio Ecológico:

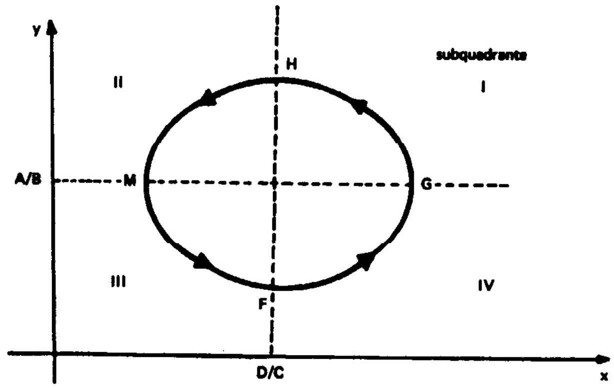

Figura 05 - Curva do Equilíbrio Ecológico

Realizemos uma análise da curva do equilíbrio ecológico: considerando o arco FG no subquadrante IV temos $x\uparrow$ e $y\uparrow$ isto é fácil de perceber, pois se x cresce, maior é o número de presas disponíveis, o que faz com que o número de predadores y cresça até que chegamos ao ponto G, que é quando o número de presas começa a decrescer devido à enorme quantidade de predadores existentes, os quais continuam a crescer em número até que o ponto H é atingido, quando os predadores começam a diminuir devido à queda da população de presas, que continua a cair até atingirmos o ponto M, caracterizado pelo início do crescimento numérico de α's , consequência direta do fato de existirem poucos predadores, os quais continuam a decrescer até que o ponto F é alcançado, onde os β's, começam um crescimento acarretado pela *abundância* de presas, e o ciclo reinicia novamente...

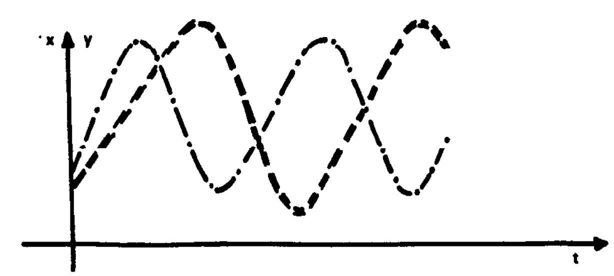

Figura 06 - Comportamento Populacional do Sistema Presa-Predador

Como podemos notar, o resultado é uma série de flutuações em densidade, tanto do predador como da presa, com uma importante e característica defasagem no tempo.

VERIFICAÇÃO DO PROCESSO DE COLAGEM

As conclusões do modelo matemático para o sistema presa-predador foram, e ainda são, amplamente verificadas na prática. Em diversos estudos observacionais realizados, os gráficos obtidos para o número de presas, bem como para o de predadores, mostravam a característica periodicidade prevista pelo modelo elaborado. Em um destes estudos, realizados durante um intervalo de noventa anos no território canadense, a relação entre o lince e a lebre foi pesquisado e o gráfico obtido vai apresentado na figura abaixo, deixando transparecer a eficiência do modelo matemático justo confeccionado.

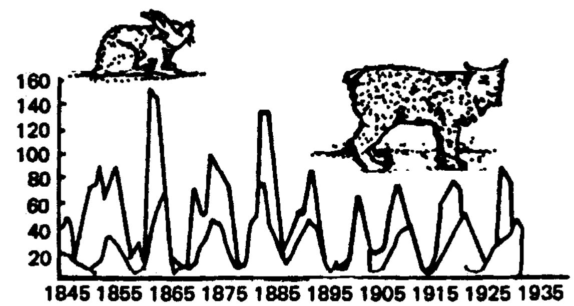

Figura 07 - Flutuações das populações de LINCE e LEBRE em um ecossistema canadense. A linha contínua representa a densidade de lebres e a sombreada se refere à população de linces. No eixo vertical, temos o número dividido por mil. (Redesenhado de MACLULICH, D. A. - Univ. Toronto Studies, Biol. Ser., no. 43,1937)

DISCUSSÃO

Em um sistema predador-presa estável, a predação é geralmente decidida utilidade para a população de presas, apesar de ser destrutiva do ponto de vista individual. Este fato, de crucial importância na estabilidade dos ecossistemas, é muitas vezes esquecido, principalmente por aqueles que acham os parasitas repugnantes e classificam os predadores de criminosos que precisam ser exterminados. Quando invadimos a relação natural predador-presa com nossas noções artificiais de amparo e justiça, enfrentando os inimigos dos mais fracos, matando os predadores para proteger as presas, os resultados destas ações são frequentemente inesperados e desastrosos. Um exemplo clássico de tal investida ocorreu no Arizona, nos Estados Unidos; lá, em uma região chamada de Kaibub Plateau, existia, antes de 1907, uma população estável de veados que girava em torno de 4.000 indivíduos. Tal número, com seus característicos aumentos e decréscimos, assim se mantinha graças, em parte, à ação predatória de lobos e pumas que viviam na mesma comunidade. Observava-se que a população dos veados era muito inferior à capacidade de vegetação ofertada pelo plateau, o que levou o governo e os moradores a, em um esforço em conjunto, matar os inimigos dos veados, no caso os predadores lobos e pumas, o que foi levado a efeito entre 1907 a 1923. O resultado foi que por volta de 1925, o número de veados aumentou para mais de 100.000, o que estava muito além da quantidade de alimentação vegetal que a área dispunha, consequenciando numa devastação sem precedentes de toda a região, e nos dois anos seguintes mais da metade dos veados morreu por falta de nutrição, com a população em forte declínio ainda por muitos anos.

O problema foi que, ao perturbar o sistema veado-lobo/puma, um enorme distúrbio também foi causado no outro sistema planta-veado que, devido à explosão populacional dos veados, sofreu um desequilíbrio com rompimento da estabilidade anteriormente existente e houve, desta forma, muito mais mortes dos veados que com a existência com os pumas e lobos...

Fomos felizes que, com uma única aproximação, conseguimos um modelo que fornecesse o comportamento de um sistema presa- predador, confirmado de boa qualidade pelas observações já realizadas em todo o mundo. De quebra, ganhamos visão no que se refere ao equilíbrio com que a natureza se perpetua. Consequências catastróficas poderá causar o homem com ações perturbadoras e ignorantes tão comuns neste século de aberrantes e tristes contradições.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

01. ENGEL, A. B. - Elementos de Biomatemática Secretaria General de 1a. OEA - Washington, 1978.

02. MELO, U.S. - Biomatemática: Métodos e Objetivos in Tecnologia - Univ. Fort. - Ano 11, no. 11, pg 09-17 - Fortaleza, 1990.

03. LOTKA, A. - Elements of Mathematical Biology Dover - New York, 1956.

04. VOLTERRA, V. - Leçons Sur La Théorie Mathématique de la Lutte Pour la vie Gauthier-Villars - Paris, 1931.

05. KEETON, W. T. - Biological Science W. W. Norton & Co., Inc. - New York, 1972.

06. GAUSE, G. F. - The Struggle For Existence Dover Publications - New York, 1964.