DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR GERAL PARA A FORMA RESTRITA DE KARMARKAR

* Neudson Cavalcante Albuquerque
** Plácido Rogério Pinheiro

Neste artigo, procuramos mostrar e ilustrar com exemplos uma maneira robusta de converter um Problema de Programação Linear geral na forma restrita necessária para aplicarmos o Algoritimo de Karmarkar.

Abstract

This article shows and gives examples of a robust way to convert a general Linear Programming Problem into the restricted form needed do apply the Karmarkar's Algorithm.

1. INTRODUÇÃO

Solucionar um Problema de Programação Linear (PPL) consiste em minimizar (ou maximizar) uma função linear (função objetivo) de forma que atenda a um sistema linear de igualdades ou desigualdades. De uma maneira geral, um PPL pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & c^t x \\ \textit{sujeito a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Para se aplicar um método de resolução genérico é necessário colocar o PPL em uma forma padrão. Isto acontece quando temos a seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & c^t x \\ \textit{sujeito a} & Ax = b \quad (b \geq 0) \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que é feito através de trocas de sinais e adições de variáveis artificiais a partir do modelo inicial. Neste ponto, aplica-se o método de resolução e encontra-se a solução ótima, se existir.

Até há bem pouco tempo, o único método de resolução eficiente disponível consistia no Método Simplex. Este percorre todos os vértices do conjunto de soluções viáveis do problema até encontrar uma solução procurada e comprovadamente é de complexidade computacional exponencial em relação ao número de variáveis.

Na tentativa de encontrar algoritmos de complexidade polinominal, grandes esforços concentraram-se em uma outra estratégia que busca a solução ótima entre os pontos interiores do conjunto de soluções viáveis. O estudo dos Algoritmos de Pontos Interiores culminou com o Algoritmo Projetivo de Karmarkar.

2. CONVERSÃO PARA A FORMA RESTRITA

Com boas qualidades teóricas e práticas, este algoritmo consiste em efetuar sucessivas projeções do conjunto de soluções viáveis em alguns espaços específicos onde são calculadas soluções intermediárias que convergem para a solução ótima. Entretanto, o método não se aplica diretamente a um PPL qualquer, e sim a uma forma restrita como descrita a seguir, onde e é um vetor de 1's.

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & c^t x \\ \textit{sujeito a} & Ax = 0 \\ & ex = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

* *Bacharel em Ciência da Computação e mestrando em Inteligência Artificial pela PUC-RJ*
** *Professor do Departamento de Matemática da UNIFOR e UECE, e doutorando em Pesquisa Operacional pela COPPE-UFRJ*

além de ser necessário satisfazer as duas condições abaixo

(A1) O ponto $x_0 = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, onde n é o número de linhas de x, é viável no problema

(A2) O valor mínimo da função objetivo no problema é zero

Em [3] mostramos uma forma muito particular de como fazer a conversão de um PPL para a forma restrita de Karmarkar. Porém, existem maneiras mais robustas de efetuar esta tarefa. Inicialmente, considere um PPL já na forma padrão

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & c^t x \\ \textit{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde A é uma matriz m x n e $x = x_1, \ldots, x_n$. Nosso primeiro passo é limitar o somatório das componentes de x. Seja Q este limite, então.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq Q$$

A constante Q é determinada por considerações de viabilidade e otimalidade. É desejável um valor pequeno, mas no pior caso temos $Q = 2^L$, onde

$$L = [1 + \log(1+m)] + [1 + \log(1+n)] + \sum_i \{1 + [\log(1 + |c_i|)]\} + \sum_i \sum_j \{1 + [\log(1 + |a_{ij}|)]\} + \sum_i \{1 + [\log(1 + |b_i|)\}$$

uma constante muito utilizada em Pesquisa Operacional.

Esta restrição é adicionada ao PPL já homogenizada através da utilização de uma variável artificial. Temos

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & ex + x_{n+1} = Q \\ & x \geq 0, x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

Para homogenizar o restante do sistema, utilizamos uma nova variável artificial de valor 1. Temos

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax - bx_{n+2} = 0 \\ & ex + x_{n+1} + x_{n+2} = Q + 1 \\ & x_{n+2} = 1 \\ & x \geq 0, xn+1 \geq 0 \end{array}$$

Por fim, para homogenizar a restrição $x_{n+2} = 1$, adicionamos uma outra restrição considerando

$ex + x_{n+1} = Q$. Temos

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax - bx_{n+2} = 0 \\ & ex + x_{n+1} - Qx_{n+2} = 0 \\ & ex + x_{n+1} + x_{n+2} = Q + 1 \\ & x \geq 0, x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0 \end{array}$$

O passo seguinte é tornar o somatório das variáveis igual a 1. Isto é feito utilizando-se a seguinte transformação

$x_i = (Q + 1)y_i$

onde $i = 1, \ldots, n + 2$. Após isto, temos

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t y \\ \text{sujeito a} & Ay - by_{n+2} = 0 \\ & 1y + y_{n+1} - Qy_{n+2} = 0 \\ & 1y + y_{n+1} + y_{n+2} = 1 \\ & y \geq 0, y_{n+1} \geq 0, y_{n+2} \geq 0 \end{array}$$

Para completar a conversão, falta-nos apenas garantir as duas restrições (A1) e (A2).

A restrição (A1) será satisfeita se utilizarmos de uma nova variável artificial com coeficiente na função objetivo igual a uma constante M e coeficientes nas restrições com valores tais a tornar o ponto

$(y_1, \ldots, y_{n+3}) = (\frac{1}{n+3}, \ldots, \frac{1}{n+3})$, viável no problema. Isto ocorre quando os coeficientes nas restrições totalizam zero. O valor de M é de magnitude $2^{O(L)}$, ou seja, um valor muito grande que tornará y_{n+3} igual a zero na otimalidade. Com isso, nosso problema tem a seguinte forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t y - My_{n+3} \\ \text{sujeito a} & Ay - by_{n+2} - [A1^t - b]y_{n+3} = 0 \\ & 1y + y_{n+1} - Qy_{n+2} - (n + 1 - Q)y_{n+3} = 0 \\ & 1y + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} = 1 \\ & y_i \geq 0, i = 1, \ldots, n + 3 \end{array}$$

A restrição (A2) pode ser evitada através da utilização de uma técnica chamada função objetivo deslizante[1]. Ela técnica trabalha com um intervalo de busca para o valor ótimo da função objetivo e utiliza biseções para aproximar-se do ponto observando a variação da função potencial.

3. Exemplos

1. Considere o seguinte PPL

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x1, x2 \geq 0 \end{array}$$

O valor de L é 14 e no pior caso teríamos $Q = 2^{14}$ = 16.386. Mas se analisarmos o sistema, veremos que o valor de Q não ultrapassa 5 e este é o valor que iremos usar.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 - 6x_4 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ & x1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Fazendo $x_i = 6y_i$, temos

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & y_1 + y_2 \\
\text{sujeito a} & 3y_1 + 2y_2 - 6y_4 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 - 5y_4 = 0 \\
 & y_1, + y_2, + y_3, + y_4 = 1 \\
 & y1,\ y2,\ y3,\ y4 \geq 0
\end{array}
$$

E, por fim, se admitimos $M = 2^{100}$, temos a forma final

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & y_1 + y_2 - 2^{100} y_5 \\
\text{sujeito a} & 3y_1 + 2y_2 - 6y_4 + y_5 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 - 5y_4 + 2y_5 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1 \\
 & y1, y2, y3, y4, y5 \geq 0
\end{array}
$$

2. Considere o seguinte PPL

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\
 & x_1 - 2x_2 \leq -3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Colocando na forma padrão

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0
\end{array}
$$

O valor de L é 24 e no pior caso teríamos $Q = 2^{24}$. Mas se analisarmos o sistema, veremos que o valor de Q não ultrapassa 10 e este é o valor que iremos usar.

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 7x_6 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 - 3x_6 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 10x_6 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 11 \\
 & x1, x2, x3, x4, x5, x6, \geq 0
\end{array}
$$

Fazendo $x_i = 11y_i$, temos

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & y_1 + y_2 \\
\text{sujeito a} & 2y_1 + 3y_2 + y_3 - 7y_6 = 0 \\
 & -y_1 + 2y_2 + y_4 - 3y_6 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - 10y_6 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1 \\
 & y1, y2, y3, y4, y5, y6 \geq 0
\end{array}
$$

E, por fim, se admitimos $M = 2^{100}$, temos a forma final

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & y_1 + y_2 - 2^{100} y_7 \\
\text{sujeito a} & 2y_1 + 3y_2 + y_3 - 7y_6 + y_7 = 0 \\
 & -y_1 + 2y_2 + y_4 - 3y_6 + y_7 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - 10y_6 + 5y_7 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 1 \\
 & y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7 \geq 0
\end{array}
$$

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BAZARAA & SHETTY; **Linear Programming and Network Flows**, 2nd. Edition, J. Wiley, 1990.

2. GONZAGA, C. C.; **Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear, IMPA**, 1987.

3. PINHEIRO, P. R. & Outros; "Técnicas Alternativas para Resolução de um Problema de Programação Linear", Revista Tecnologia, Universidade de Fortaleza, 1991.