

# CASCAS DE REVOLUÇÃO COM CARGA SIMÉTRICA EM RELAÇÃO AO SEU EIXO

\* Benedito Torquato de Oliveira

*Este artigo, visa a dedução das equações que permitem o cálculo através da teoria de Membrana, dos esforços normais que se desenvolvem nas cascas de revolução submetidas a um carregamento simétrico, em relação ao seu eixo de revolução.*

*Devido ao grande interesse prático nas aplicações destas superfícies nos diversos tipos de recipientes, depósitos e cúpulas, faremos algumas aplicações de ordem práticas.*

## 1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

As cascas onde as superfícies médias são geradas por curvas planas  $C : y = f(x)$ , que giram em torno de eixo  $y$  e pertencente a seu plano  $\pi$  ( $x$  o  $y$ ), são chamadas de cascas de revolução, (Fig. 01). O plano  $\pi$  ( $x$  o  $y$ ) é chamado de plano meridiano e a curva  $C : y = f(x)$  é chamada de curva geratriz ou meridiano. As interseções dos planos  $\beta$ , perpendiculares ao eixo de rotação  $y$  com a superfície de revolução, são chamadas de paralelos. (Fig. 01).

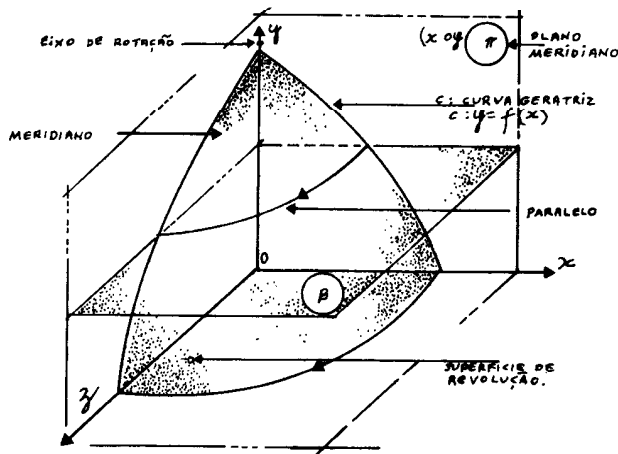


Figura 01

## 2. MONTAGEM DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Considere-se um elemento infinitesimal de área igual a  $ds$  pertencente a superfície média de uma casca de revolução, separados por dois meridianos  $M_1$  e  $M_2$  e dois paralelos  $P_1$  e  $P_2$ , conforme Fig. 02 (a). Note-se que a posição de um meridiano é definida por ângulo  $\Theta$ , o qual é medido a partir de um plano meridiano fixo dado. A posição de um paralelo, é definida através de um ângulo  $\varphi$  formado a partir do eixo de rotação  $y$  com a normal do elemento  $ds$ .

Considerando a Fig. 02 (a), teremos as considerações geométricas que se seguem:

- O plano XOY é tangente a superfície média da casca de revolução, na origem do sistema de coordenadas trirretangular XYZ. (A origem deste sistema é a interseção do meridiano  $M_1$  com o paralelo  $P_1$ ).
- O plano YOZ é o plano do meridiano  $M_1$ .
- O eixo OY é tangente ao meridiano  $M_1$ .
- O eixo OX é tangente ao paralelo  $P_1$ .
- O eixo OZ, obviamente é normal a superfície média da casca de revolução.

\* Eng° Civil e Matemático; Eng° DNER e Prof° da UNIFOR.

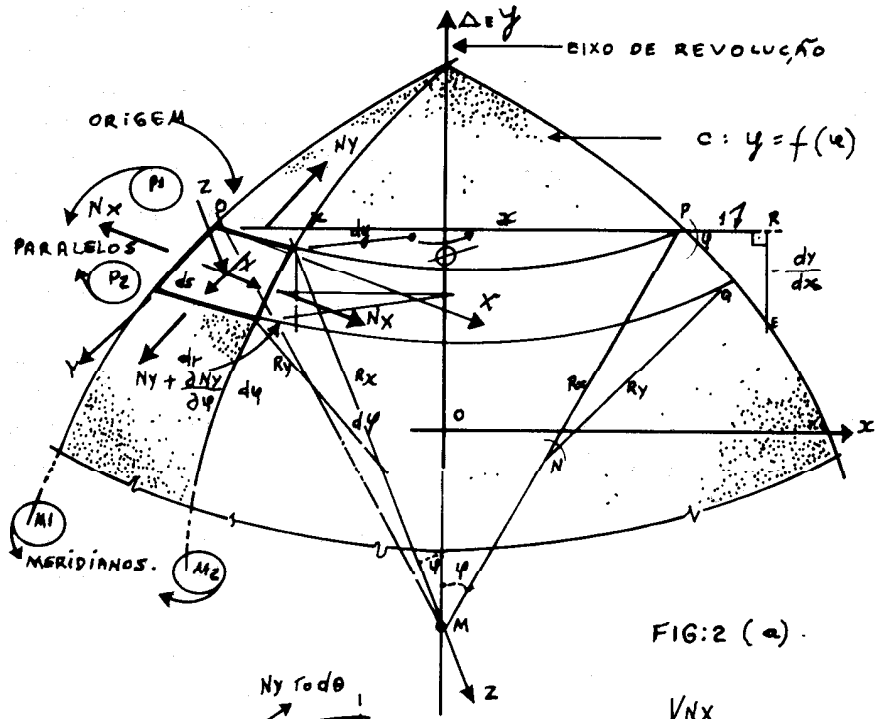


FIG. 2 (a)

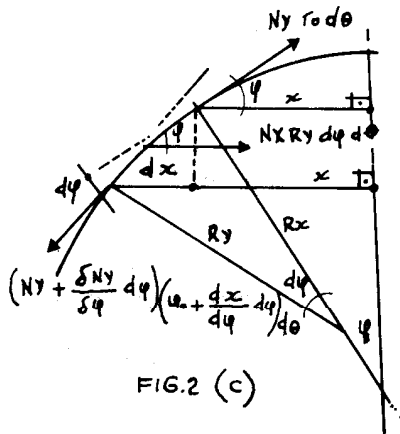


FIG. 2 (c)

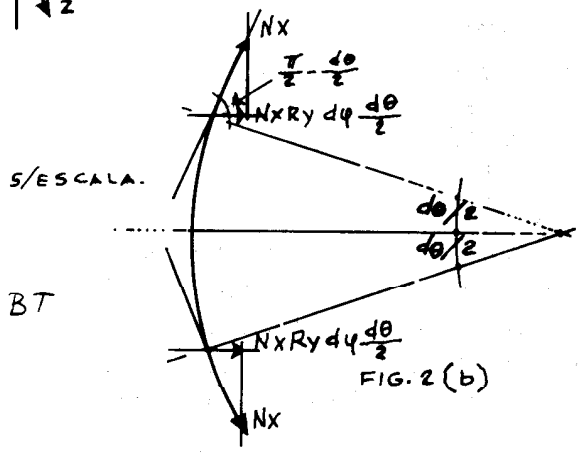


FIG. 2 (b)

Figura 02

- f)  $R_x = PM$  : Raio principal da curvatura da superfície média da casca de revolução dada no plano XOZ.
- g)  $R_y = PN$  : Raio principal de curvatura da superfície média da casca de revolução dada no plano YOZ.
- h)  $PT = x = R_x \text{ sen } \varphi$ .
- i) Fazendo  $PR = 1$  e considerando o triângulo  $\Delta PRS$ , temos: (observe que  $dy < 0$ , logo  $-dy > 0$ ).
- ig  $\varphi = \frac{-dy}{dx} = \frac{RS}{1} = RS$
- j) No triângulo  $\Delta PRS$ , temos pelo Teorema de Pitágoras:

$PS^2 = PR^2 + RS^2$ . Substituindo-se os valores de  $PR$  e  $RS$ , vem:

$$PS = \sqrt{1 + \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

1) Considerando a semelhança entre os triângulos  $\Delta MTP$  e  $\Delta PRS$ , teremos:

$$\frac{PM}{PS} = \frac{PT}{RS}$$

Substituindo-se os valores de  $PM$ ,  $PS$ ,  $PT$  e  $RS$ , vem:

$$\frac{R_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{x}{-\frac{dy}{dx}}$$

$$R_x = \frac{x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{-\frac{dy}{dx}}$$

Se entretanto  $y = f(x)$  for crescente, teríamos  $dy > 0$  e neste caso a expressão de  $R_x$ , seria:

$$R_x = \frac{x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{+\frac{dy}{dx}}$$

Poderíamos unificar ambas as fórmulas acima, considerando o valor absoluto de  $\frac{dy}{dx}$ , ou seja:

$$R_x = \frac{x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \dots (I)$$

m) Considerando o raio de curvatura da curva  $C : y = f(x)$  no ponto  $P : (x, y)$  pertencente ao plano meridiano  $\pi$ , tem-se pelo cálculo diferencial:

$$R_y = \frac{\left[ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|} \dots (II)$$

n) O plano meridiano  $YOZ$  e o plano perpendicular a ele  $XOZ$  por tratar-se de superfície de revolução, são planos de curvaturas principais. Os correspondentes raios de curvaturas  $R_x$  e  $R_y$ , são os chamados raios de curvaturas principais. Supondo-se a superfície de revolução sendo representada pela função:

$Z = F(x, y)$ , tem-se na origem as seguintes curvaturas ( $Z = F(0, 0) = 0$ ).

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ pois } \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \text{ pois } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$\frac{1}{R_{xy}} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$  (a torção na superfície de revolução é nula nos planos principais de curvaturas).

Na montagem das equações de equilíbrio do elemento infinitesimal de área  $ds$ , adotaremos a seguinte nomenclatura:

i)  $N_y$  e  $N_x$  são os esforços por unidade de comprimento na direção do eixo  $Y$  e do eixo  $X$ , respectivamente. Esses esforços são evidentemente, tangentes a superfície média da casca.

ii) As tensões de cisalhamento  $N_{xy} = N_{yx}$  desenvolvidas nas faces laterais do elemento  $ds$ , são nulas devido a simetria geométrica da casca e do carregamento em relação ao eixo de rotação.

iii)  $X, Y$  e  $Z$  são as componentes da carga externa, por unidade de superfície que atuam nas direções  $OX, OY$  e  $OZ$  respectivamente. Devido a simetria do carregamento em relação ao eixo de rotação, as componentes se resumem a  $Y$  e  $Z, X = 0$ .

Basicamente são três as equações de equilíbrio do elemento infinitesimal de área  $ds$ . (Fig. 2(a), 2(b) e 2(c))

$$1) \sum F_x = N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \theta} d\theta - N_x = 0$$

$$\dots \frac{\partial N_x}{\partial \theta} = 0$$

$$\dots N_x = \text{constante}$$

Observa-se então que,  $N_x$  não varia com o ângulo  $\Theta$  ao longo de um paralelo dado.

$$2) \sum F_y = \left( N_y + \frac{\partial N_y}{\partial \phi} d\phi \right) \left( x + \frac{dx}{d\phi} d\phi \right) d\Theta \cos d\phi -$$

$$- N_y x d\Theta - 2 N_x R_y d\phi \operatorname{sen} \frac{d\Theta}{2} \cos \phi$$

Considerando por aproximação que:

$$\cos d\phi \cong 1$$

$$\operatorname{sen} \frac{d\Theta}{2} \cong \frac{d\Theta}{2}$$

e substituindo-se na expressão acima, vem:

$$\left( N_y + \frac{\partial N_y}{\partial \phi} d\phi \right) \left( x + \frac{dx}{d\phi} d\phi \right) d\Theta - N_y x d\Theta -$$

$$- N_x R_y d\phi d\Theta \cos \phi + Y R_y d\phi x d\Theta = 0$$

que simplificando e eliminando os infinitesimos de 2ª ordem, vem:

$$x \frac{\partial N_y}{\partial \phi} + N_y \frac{dx}{d\phi} - N_x R_y \cos \phi + Y R_y x = 0$$

$$\dots \frac{\partial}{\partial \phi} (x N_y) - N_x R_y \cos \phi + Y R_y x = 0 \dots (III)$$

$$3) \sum F_z = (N_y + \frac{\partial N_y}{\partial \varphi} d\varphi)(x + \frac{dx}{d\varphi} d\varphi) d\Theta \cos(\frac{\pi}{2} - d\varphi) + N_x R_y d\varphi d\Theta \sin\varphi + Z R_y \cdot d\varphi x d\Theta = 0$$

que simplificando e desprezando os infinitesimos de 2ª ordem, vem:

$$N_y x + (\frac{\partial N_y}{\partial \varphi} x + N_x \frac{dx}{d\varphi}) d\varphi + N_x R_y \sin\varphi + Z R_y x = 0$$

$$\therefore N_y x + \frac{d}{d\varphi} (N_y x) d\varphi + N_x R_y \sin\varphi + Z R_y x = 0$$

Desprezando o segundo termo da expressão acima em relação aos outros termos, vem:

$$N_y x + N_x R_y \sin\varphi + Z R_y x = 0$$

Considerando que  $x = R_x \sin\varphi$  e substituindo na expressão acima, teremos finalmente:

$$\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} = -Z \quad \dots (IV)$$

As equações (III) e (IV) resolvem o problema, no entanto, podemos deduzir diretamente uma expressão para determinar  $N_y$  que juntamente com a expressão (IV), permitem o cálculo de  $N_x$  e  $N_y$  para uma casca de revolução dada. (Fig. 03).

Considerando-se o elemento infinitesimal de área  $ds$ , vem: (Fig. 03 a).

$$ds = (x d\Theta)(R_y d\varphi) = x d\ell d\Theta$$

mas,

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$$

logo,

$$ds = x \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} ds d\Theta \quad \dots (V)$$

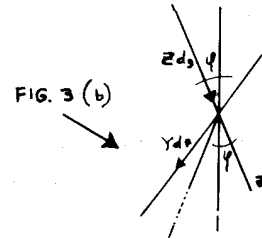
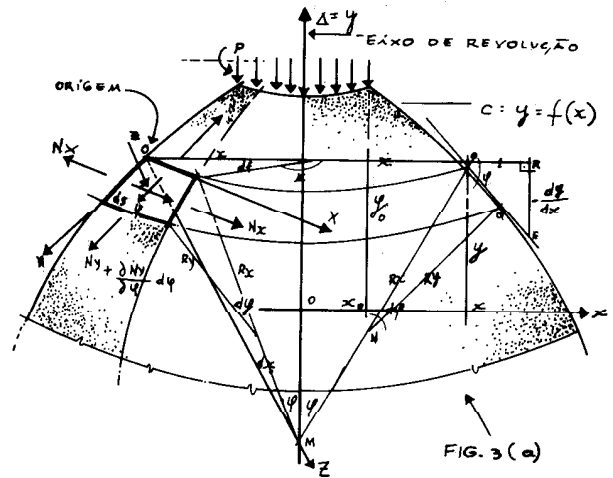


Figura 03

Na Fig. 3b, a componente infinitesimal da resultante das forças externas, na direção do eixo vertical  $Y$  de revolução da casca, será:

$$dR = Y ds \sin\varphi + Z ds \cos\varphi + P x_0 d\Theta$$

onde  $P$  é a carga por unidade de comprimento, atuante no bordo de um paralelo de raio  $x_0$ . (Fig. 03 a)

$$\therefore dR = (Y \sin\varphi + Z \cos\varphi) ds + P x_0 d\Theta$$

substituindo-se  $ds$  dado pela fórmula (V) na expressão acima, temos:

$$\therefore dR = (Y \sin\varphi + Z \cos\varphi) x \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \cdot dx d\Theta + P x_0 d\Theta$$

integrando a expressão acima, teremos para a resultante das forças externas que atuam entre os paralelos de raios  $x$  e  $x_0$ , a seguinte expressão:

$$R = 2 \pi \left( \int_{x_0}^x (Y \operatorname{sen} \varphi + Z \operatorname{cos} \varphi) x \right.$$

$$\left. \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + P x_0 \right) \dots \text{(VI)}$$

Considerando o equilíbrio da calota na direção da resultante  $R$ , teremos:

$$2 \pi x N_y \operatorname{sen} \varphi + R = 0$$

Como:  $\operatorname{sen} \varphi = \frac{x}{R_x}$ , vem:

$$2 \pi x N_y \frac{x}{R_x} + R = 0$$

$$\dots N_y = -\frac{R_x R}{2 \pi x^2}$$

substituindo-se na expressão acima o valor de  $R_x$  dado pela expressão (I) e o valor de  $R$  dado por (VI), teremos finalmente:

$$N_y = -\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left|\frac{dy}{dx}\right|}\right) \left(\int_{x_0}^x (Y \operatorname{sen} \varphi + Z \operatorname{cos} \varphi) x \right.$$

$$\left. \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + P x_0 \right) \dots \text{(VII)}$$

A fórmula acima foi demonstrada considerando-se  $y = f(x)$  decrescente, entretanto, é fácil provar seguindo a mesma linha de raciocínio que, se  $y = f(x)$  for crescente, a fórmula (VII) torna-se:

$$N_y = -\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left|\frac{dy}{dx}\right|}\right) \left(\int_{x_0}^x (Y \operatorname{sen} \varphi + X \operatorname{cos} \varphi) x \right.$$

$$\left. \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + P x_0 \right) \dots \text{(VIII)}$$

Agora, faremos algumas aplicações dessas equações para calcular os esforços de membrana  $N_x$  e  $N_y$  nas cascas de revolução, com os carregamentos normalmente utilizados na prática.

a) Carga  $P$  por unidade de comprimento, aplicada no bordo de um paralelo de raio  $x_0$  (Fig. 04).

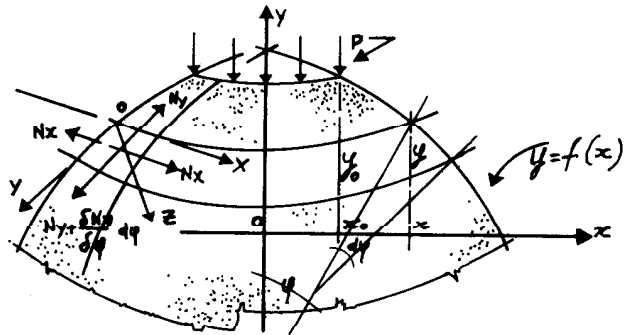


Figura 04

Neste caso, teremos:

$$Y = Z = 0$$

As equações (IV), (VII) ou (VIII) ficam simplificadas respectivamente, assim:

$$\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} = 0 \dots \text{(IX)}$$

$$N_y = -\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left|\frac{dy}{dx}\right|}\right) P x_0 \dots \text{(X)}$$

As equações (IX) e (X), nos permite calcular  $N_x$  e  $N_y$ .

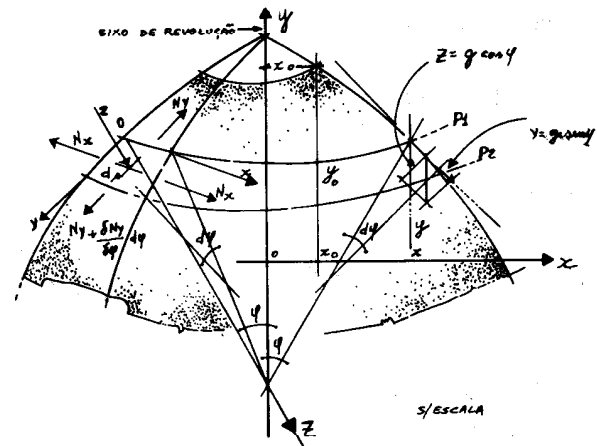


Figura 05

b) Carga devido ao peso próprio  $g$  por unidade de superfície. (Fig. 05).

Neste caso, tem-se:

$$Y = g \operatorname{sen} \varphi$$

$$Z = g \cos \varphi$$

$$P = 0$$

As equações (IV), (VII) ou (VIII) ficam simplificadas respectivamente, assim

$$\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} = -g \cos \varphi \quad \dots \text{(XI)}$$

$$N_y = - \left( \frac{g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left| \frac{dy}{dx} \right|} \right) \cdot$$

$$\cdot \left( \int_{x_0}^x x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \right) \quad \dots \text{(XII)}$$

Se  $y = f(x)$  for crescente, teremos então:

$$N_y = - \left( \frac{g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left| \frac{dy}{dx} \right|} \right) \cdot$$

$$\cdot \int_x^{x_0} x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \dots \text{(XIII)}$$

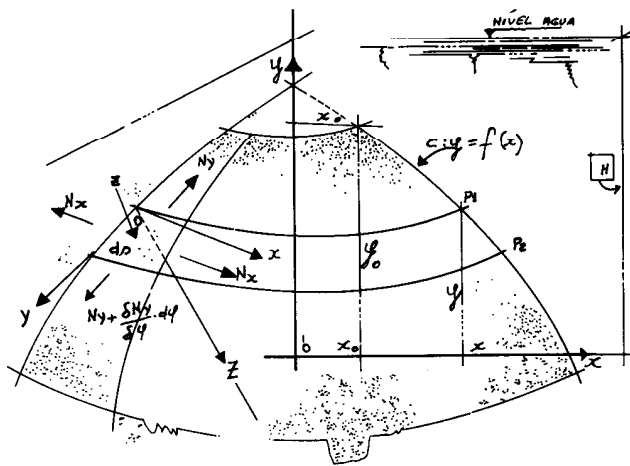


Figura 06

As questões (XI), (XII) ou (XIII) nos permite calcular os esforços  $N_x$  e  $N_y$ .

a) Carga devida a pressão exercida por um líquido de peso específico  $P$ . (Fig. 06).

Teremos neste caso:

$$Y = 0$$

$$Z = P (H - Y)$$

Onde  $H$  é a cota da superfície livre do líquido em relação ao plano horizontal que passa pelo eixo  $O X$ . (Fig. 06).

$$P = 0$$

Substituindo-se os valores acima nas equações (IV), (VII) ou (VIII), estas ficam simplificadas, assim:

$$\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} = -P (H - Y) \quad \dots \text{(XIV)}$$

$$N_y = - \rho \left( \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left| \frac{dy}{dx} \right|} \right) \cdot$$

$$\cdot \left( \int_{x_0}^x (H - Y) \cos \varphi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \right)$$

lembrando que:

$$d l = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

e que,  $dx = d l \cos \varphi$ .

Substituindo-se estes valores na fórmula acima, vem:

$$N_y = - \frac{\rho \left( \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right)}{x \left| \frac{dy}{dx} \right|} \left( \int_{x_0}^x (H - Y) x dx \right)$$

Sendo  $Y = f(x)$  e substituindo-se na expressão anterior, vem finalmente:

$$N_y = - \rho \left( \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left| \frac{dy}{dx} \right|} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{H}{2}(x^2 - x_0^2) - \int_{x_0}^x x f(x) dx \right] \dots \text{(XV)}$$

se  $y = f(x)$  foi crescente, teremos:

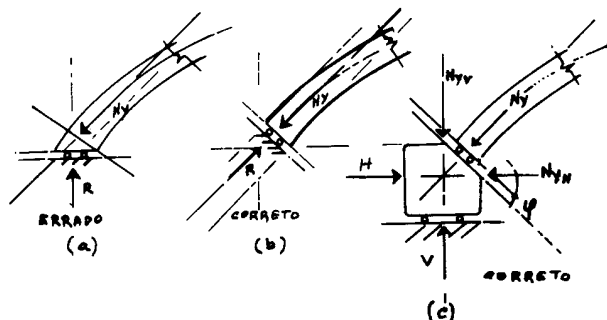
$$N_y = -\rho \left( \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x \left| \frac{dy}{dx} \right|} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{H}{2}(x_0^2 - x^2) - \int_x^{x_0} x f(x) dx \right] \dots \text{(XVI)}$$

As equações (XIV), (XV) ou (XVI) permite o cálculo dos esforços  $N_x$  e  $N_y$ .

Analisando as fórmulas deduzidas anteriormente para os diversos casos de carregamento utilizados na prática, observa-se que toda problemática do cálculo dos esforços de membrana  $N_x$  e  $N_y$ , reside no fato de se conhecer o carregamento e a função  $y = f(x)$  da curva geratriz da superfície média da casca no seu plano meridiano  $\pi(xoy)$ , (Fig. 01). Os raios de curvaturas principais podem ser determinados facilmente com o emprego das fórmulas (I) e (II), para cada caso específico da função  $y = f(x)$ .

Agora deve-se observar que, para se aplicar a teoria de membrana, faz-se necessário que as condições de apoio nos bordos das cascas sejam apropriadas isto é, as reações nos apoios devem obrigatoriamente ser tangentes a superfície média da casca. Na Fig. 07 (a), observa-se que a reação vertical não equilibra a componente horizontal de  $N_y$  e portanto, este apoio não é apropriado. Na Fig. 07 (b), a posição do apoio é apropriada. Nas cascas de revolução é costume utilizar-se um anel no bordo da casca, com objetivo de absorver a componente horizontal de  $N_y$ , a componente vertical de  $N_y$  fica equilibrada pela reação vertical do apoio. (Fig. 07 (c)).



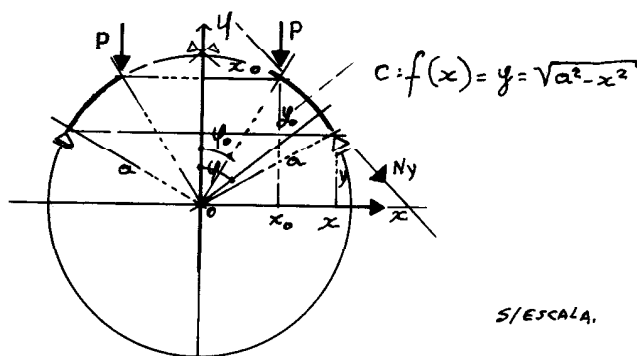
S/ESCALA

Figura 07

### 3. APLICAÇÕES PRÁTICAS

#### Exemplo 1.

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  na calota esférica de raio  $a$ , submetida à ação de uma carga  $P$  por unidade de comprimento, aplicada no bordo de um paralelo de raio  $x_0$ . (Fig. 08)



S/ESCALA.

Figura 08

Neste caso, teremos:

$$Y = Z = 0$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\therefore y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$R_x = R_y = a$$

Derivando a expressão acima, em relação a  $x$ , vem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

substituindo-se os valores acima na fórmula (x), teremos:

$$N_y = \left( \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}}{x \left| \frac{x}{y} \right|} \right) P x_0$$

$$\therefore N_y = -\frac{a x_0}{x^2} P \dots \text{(a)}$$

como,  $x_0 = a \operatorname{sen} \varphi$  e  $x = a \operatorname{sen} \varphi$ , a expressão acima, fica:

$$N_y = -\left(\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen}^2 \varphi}\right) P$$

A fórmula (IV), fornece:

$$N_x = \left(\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen}^2 \varphi}\right) P \dots (b)$$

As equações (a) e (b) nos permite o cálculo dos esforços de  $N_x$  e  $N_y$ .

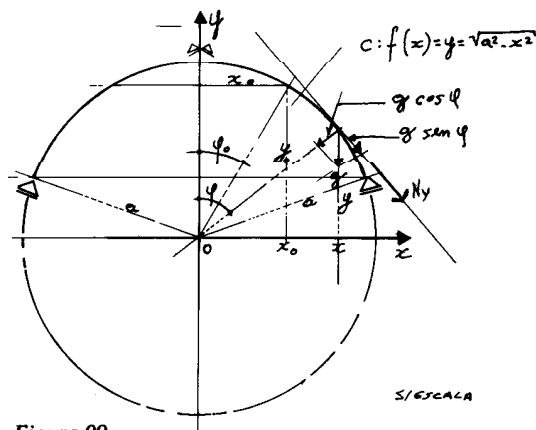


Figura 09

### Exemplo 2.

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  na calota esférica de raio  $a$ , submetida à ação do peso próprio  $g$  por unidade de superfície. (Fig. 09).

Neste caso, teremos:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  (Ver exemplo 1) que substituindo-se na fórmula (XII), fica:

$$N_y = -\left(\frac{g \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}}{x \left| -\frac{x}{y} \right|}\right) \cdot$$

$$\cdot \left( \int_{x_0}^x x \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx \right)$$

$$\therefore N_y = -\left(\frac{g a^2}{x^2}\right) \left( \int_{x_0}^x \frac{x}{y} dx \right)$$

mas como

$$x = a \text{ sen } \varphi$$

$$dx = a \text{ cos } \varphi d \varphi$$

$$y = a \text{ cos } \varphi$$

substituindo-se estes valores na última expressão de  $N_y$  dada acima, fica:

$$N_y = -\left(\frac{g a}{\text{sen}^2 \varphi}\right) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \text{sen } \varphi d \varphi$$

$$\therefore N_y = -\frac{g a}{\text{sen}^2 \varphi} (\text{cos } \varphi_0 - \text{cos } \varphi) \dots (c)$$

como o valor de  $N_y$  dado acima, a fórmula (XI) fornece para  $R_x = R_y = a = :$

$$N_x = g a \left( \frac{\text{cos } \varphi_0 - \text{cos } \varphi}{\text{sen}^2 \varphi} - \text{cos } \varphi \right) \dots (d)$$

As equações (c) e (d) permitem o cálculo dos esforços  $N_x$  e  $N_y$ .

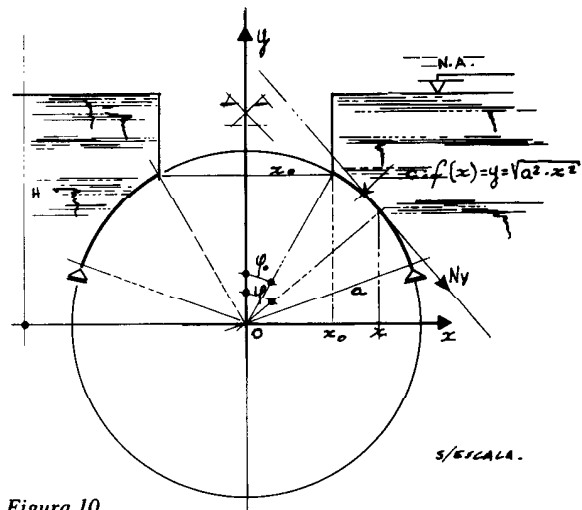


Figura 10

### Exemplo 3.

Determinar os esforços de  $N_x$  e  $N_y$  na calota esférica de raio  $a$ , submetida a pressão exercida por um líquido de peso específico  $P$  (Fig. 10).

Temos neste caso:

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ (ver exemplo 1).}$$



substituindo-se os valores acima na fórmula (XVI), teremos:

$$N_y = -\rho \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}{x \cdot \frac{x}{y}} \right) \left[ \frac{H}{2} (x^2 - x_0^2) - \int_{x_0}^x x \sqrt{a^2 - x^2} dx \right]$$

$$\therefore N_y = \left( -\frac{\rho a}{x^2} \right) \left[ \frac{H}{2} (x^2 - x_0^2) - \int_{x_0}^x x \sqrt{a^2 - x^2} dx \right]$$

$$\dots N_y = \left( -\frac{\rho a}{x^2} \right) \left[ \frac{H}{2} (x^2 - x_0^2) - \int_{x_0}^x x \sqrt{a^2 - x^2} dx \right]$$

mas como:

$$x = a \operatorname{sen} \varphi$$

$$dx = a \cos \varphi d\varphi$$

$$x_0 = a \operatorname{sen} \varphi_0$$

que substituindo-se na expressão de  $N_y$  dada acima e simplificando, teremos:

$$N_y = \rho \left[ \frac{a^2}{3} \left( \frac{\cos^3 \varphi_0 - \cos^3 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \right) - \frac{Ha}{2} \cdot \left( 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \right) \right] \dots (e)$$

substituindo-se o valor de  $N_y$  dado pela expressão acima na fórmula (XIV), tem-se para  $R_x = R_y = a$ :

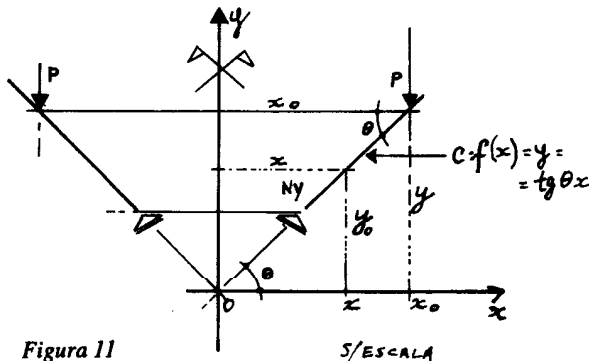


Figura 11

$$N_x = -\rho \left[ \frac{a \cdot h}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{a^2}{3} \cdot \left( \frac{\cos^3 \varphi_0 - \cos^3 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \right) - 3 \cos \varphi \right) \right] \dots (f)$$

As equações (e) e (f), resolvem o problema.

#### Exemplo 4.

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  na casca tronco cônica submetida à ação de uma carga  $\rho$ , por unidade de comprimento, aplicada no bordo do paralelo superior de raio  $x_0$ . (Fig. 11).

Neste caso, teremos:

$$Y = f(x) = \operatorname{tg} \Theta \cdot x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Theta$$

substituindo-se os valores acima na fórmula (x), vem:

$$N_y = -\left( \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta}}{x + \operatorname{tg} \Theta} \right) \cdot P x_0$$

$$\therefore N_y = -\frac{x_0 P}{x \operatorname{sen} \Theta} \dots (g)$$

A equação (IX) fornece para  $R_y = 0$ :

$$N_x = 0 \dots (h)$$

As equações (g) e (h) resolvem o problema.

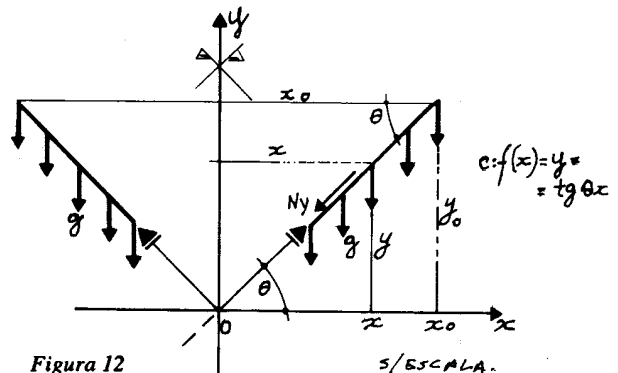


Figura 12

#### Exemplo 5.

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  na casca tronco cônica submetida à ação do peso próprio  $g$  por unidade de superfície. (Fig. 12).

Neste caso, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Theta \quad (\text{ver exemplo 4})$$

substituindo-se a expressão acima na fórmula (XIII), vem:

$$N_y = -\left(\frac{g \operatorname{sen} \Theta}{x \operatorname{tg} \Theta}\right) \left(\int_x^{x_0} x \operatorname{sec} \Theta \, dx\right)$$

$$\therefore N_y = -\frac{g}{x \operatorname{sen}^2 \Theta} (x_0^2 - x^2) \quad \dots (i)$$

A equação (XI) fornece para

$$R_x = \frac{x}{\operatorname{sen} \Theta} \text{ e } R_y = \infty:$$

$$N_x = -g x \operatorname{cotg} \Theta \quad \dots (j)$$

As equações (i) e (j) determinam os esforços  $N_x$  e  $N_y$ .

#### Exemplo 6.

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  na casca tronco cônica submetida a carga devida a pressão exercida por um líquido de peso específico  $\rho$  (Fig. 13).

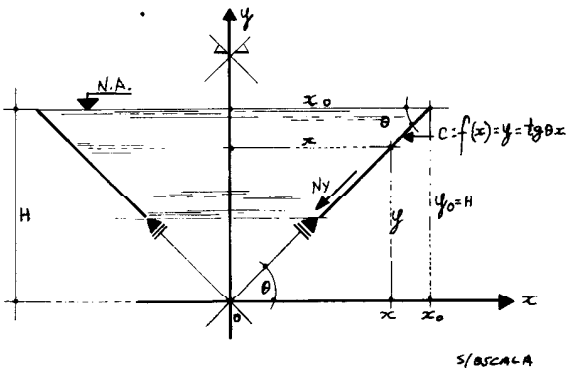


Figura 13

Neste caso, vamos ter:

$$y = f(x) = (\operatorname{tg} \Theta) x$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Theta$$

$$H = x_0 \operatorname{tg} \Theta$$

substituindo-se as expressões acima na fórmula (XVI), vem:

$$N_y = -\rho \frac{\operatorname{sec} \Theta}{x \operatorname{tg} \Theta} \left[ \frac{x_0 \operatorname{tg} \Theta}{2} (x_0^2 - x^2) - \right.$$

$$\left. - \int_{x_0}^x x \operatorname{tg} \Theta \, dx \right]$$

$$\therefore N_y = -\frac{\rho}{x \operatorname{cos} \Theta} \left[ \frac{x_0}{2} (x_0^2 - x^2) - \frac{1}{3} (x_0^3 - x^3) \right]$$

$$\therefore N_y = -\frac{\rho}{6 x \operatorname{cos} \Theta} (x_0 - x)^2 (x_0 + 2x) \quad \dots (k)$$

A equação (XIV), fornece para

$$R_y = \infty \text{ e } R_x = \frac{x}{\operatorname{sen} \Theta}:$$

$$N_x = \frac{\rho x (x_0 - x)}{\operatorname{cos} \Theta} \quad \dots (l)$$

As equações (k) e (l) nos permite resolver o problema.

#### Exemplo 7

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  no segmento interno do toro circular, submetido a ação de uma carga  $P$  por unidade de comprimento aplicada no bordo do paralelo superior de raio  $x_0$ . (Fig. 14).

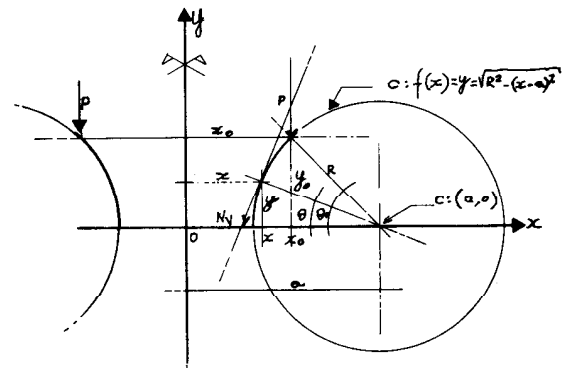


Figura 14

Tem-se:

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2 \text{ e } y = f(x) = \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$$

$$\therefore 2(x-a) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y}$$

substituindo-se o valor de  $\frac{dy}{dx}$  na expressão (X), teremos:

$$N_y = -\left(\frac{\sqrt{1 + \left(-\frac{x-a}{y}\right)^2}}{x \left(-\frac{x-a}{y}\right)}\right) P x_0$$

$$\therefore N_y = - \frac{R x_o P}{x(a-x)} \quad \dots (m)$$

da equação (IX), vem:

$$N_x = - \frac{R_x}{R_y} N_y$$

$$\text{mas, } R_x = \frac{x}{\text{sen } \varphi} = \frac{x}{\text{sen } \Theta}$$

$$R_y = R.$$

substituindo-se estes valores na expressão acima, teremos:

$$N_x = - \frac{x}{R} \text{sen } \Theta N_y = - \frac{x}{Y} N_y$$

substituindo-se o valor de  $N_y$  na expressão acima, teremos:

$$N_x = \frac{R x_o P}{y(a-x)} = \frac{R \cdot x_o \cdot P}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2} \cdot (a-x)} \quad \dots (n)$$

As equações (m) e (n) permitem calcular os esforços  $N_x$  e  $N_y$ .

### Exemplo 8.

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  na casca correspondente ao segmento interno de toro circular, submetido a ação do peso próprio  $g$  por unidade de superfície. (Fig. 15).

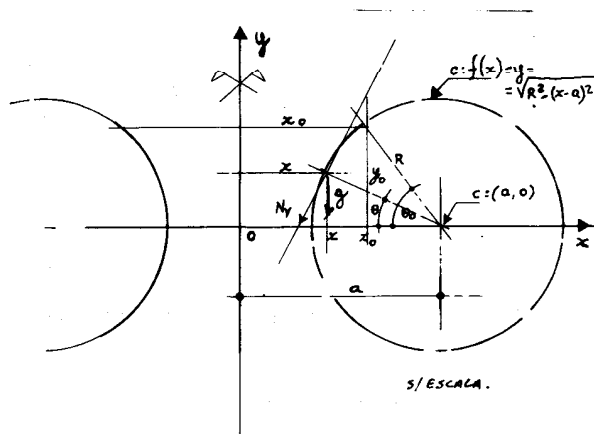


Figura 15

Teremos:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x-a}{y} \quad (\text{ver exemplo 07})$$

a fórmula (XIII), fornece:

$$N_y = - \left[ \frac{g \sqrt{1 + \left(-\frac{x-a}{y}\right)^2}}{x \left(-\frac{x-a}{y}\right)} \right] \cdot \left( \int_x^{x_o} x \sqrt{1 + \left(-\frac{x-a}{y}\right)^2} dx \right)$$

$$\therefore N_y = - \frac{g R^2}{x(a-x)} \int_x^{x_o} \frac{x}{y} dx.$$

mas:

$$x = a - R \cos \Theta$$

$$y = -a \text{sen } \Theta$$

$$dx = R \text{sen } \Theta d \Theta$$

substituindo-se estes valores na expressão acima, vem:

$$N_y = - \left[ \frac{g R^2}{x(a-x)} \int_{\Theta}^{\Theta_o} (a - R \cos \Theta) d \Theta \right]$$

$$\therefore N_y = - \left[ \frac{g R^2}{x(a-x)} \right] \left[ a(\Theta_o - \Theta) - R(\text{sen } \Theta_o - \text{sen } \Theta) \right]$$

pondo tudo em função do ângulo  $\Theta$ , vem:

$$N_y = - \left[ \frac{g R^2}{(a - R \cos \Theta) R \cos \Theta} \right] \left[ \{ a(\Theta_o - \Theta) - R(\text{sen } \Theta_o - \text{sen } \Theta) \} \right]$$

e finalmente, vem:

$$N_y = \frac{-g R \left[ a(\Theta_o - \Theta) - R(\text{sen } \Theta_o - \text{sen } \Theta) \right]}{\cos \Theta (a - R \cos \Theta)} \quad \dots (o)$$

observando-se a Fig. 18, tem-se:

$$\varphi = 90 + \Theta$$

$$R_y = R$$

$$R_x = \frac{x}{\cos \Theta}$$

substituindo-se os valores acima na equação (XI), vem:

$$\frac{N_x}{x} + \frac{-gR \left[ a(\Theta_o - \Theta) - R(\sin \Theta_o - \sin \Theta) \right]}{\cos \Theta (a - R \cos \Theta)} = -g \cos \varphi$$

$$\therefore N_x = g \left\{ \left[ \frac{a - (\Theta_o - \Theta) - R(\sin \Theta_o - \sin \Theta)}{\cos^2 \Theta} \right] - \left( \frac{a - R \cos \Theta}{\cos \Theta} \right) \cos \varphi \right\} \dots (p)$$

As expressões (o) e (p) resolvem o problema.

### Exemplo 9

Determinar os esforços  $N_x$  e  $N_y$  na casca correspondente ao segmento interno de toro circular submetido a pressão exercida por um líquido de peso específico  $\rho$  . . (Fig. 16).

teremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y} \quad (\text{ver exercício n}^\circ 7)$$

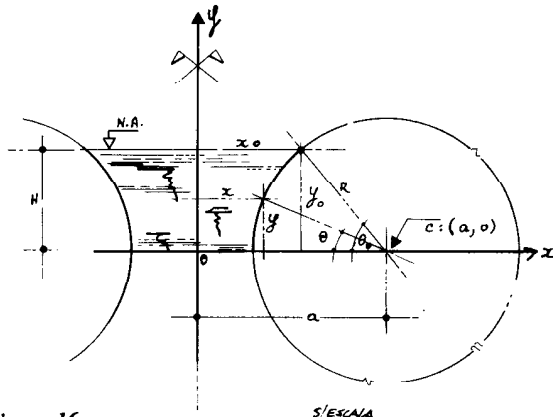


Figura 16

A fórmula (XVI), fornece:

$$N_y = -\rho \left[ \frac{R}{x(a-x)} \right] \left[ \frac{H}{2} (x_o^2 - x^2) - \int_x^{x_o} x y dx \right]$$

mas como:

$$x = a - R \cos \Theta$$

$$y = R \sin \Theta$$

$$dx = R \sin \Theta d\Theta$$

e substituindo-se estes valores na expressão acima de  $N_y$  e pondo tudo em função do ângulo  $\Theta$  , , vem:

$$N_y = -\rho \left[ \frac{R}{(a - R \cos \Theta) R \cdot \cos \Theta} \right] \left\{ \frac{H}{2} \left[ (a - R \cos \Theta_o)^2 - (a - R \cos \Theta)^2 \right] - \int_{\Theta}^{\Theta_o} (a - R \cos \Theta) \cdot (R \sin \Theta) R \sin \Theta d\Theta \right\}$$

$$\therefore N_y = \frac{-\rho}{(a - R \cos \Theta) \cos \Theta} \left\{ \frac{H}{2} \left[ (a - R \cos \Theta_o)^2 - (a - R \cos \Theta)^2 \right] - R^2 \int_{\Theta}^{\Theta_o} (a - R \cos \Theta) \cdot \sin^2 \Theta d\Theta \right\}$$

que desenvolvendo, vem finalmente:

$$N_y = -\left( \frac{\rho}{a - R \cos \Theta \cos \Theta} \right) \left\{ \frac{H}{2} \left[ (a - R \cos \Theta_o)^2 \right] - \frac{aR^2}{2} (\Theta_o - \Theta) - \frac{1}{2} (\sin 2\Theta_o - \sin 2\Theta) \right\} + \frac{R^3}{3} (\sin^3 \Theta_o - \sin^3 \Theta) \dots (q)$$

observando-se a Fig. 16, tem-se:

$$\varphi = 90 + \Theta$$

$$R_y = R$$

$$R_x = \frac{x}{\cos \Theta}$$

$$Y = R \sin \Theta$$

Substituindo-se os valores acima na equação (XIV), e com o valor de  $N_y$  dado pela expressão acima, teremos finalmente:

$$\frac{N_x}{x} + \frac{N_y}{R} = -\rho(H - R \sin \Theta)$$

$$N_x = \left( \frac{a - R \cos \Theta}{R \cos \Theta} \right) \left[ \rho (R \sin \Theta - H) - N_y \right] (r)$$

As expressões (q) e (r) nos permite determinar os esforços de membrana na superfície do segmento interno do toro circular.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMEN- DAÇÕES

Nas cascas de revolução em concreto armado as armaduras devem ser dispostas segundo os paralelos e os meridianos. Se  $N_y$  for em esforço de compressão, só é necessário usar uma armadura mínima ao longo dos meridianos, isto é, no caso de

$$\sigma_c = \frac{N}{100 \cdot e} \leq 15 \text{ kgf/cm}^2, \text{ sendo "e" a espes-}$$

sura da casca em cm, maior ou igual a um dos valores abaixo:

$$e \geq \frac{R}{500} \text{ cm}, e \geq 6 \text{ cm}.$$

onde  $R$  é o maior raio de curvatura da casca.

A armadura necessária segundo os paralelos e nas zonas onde  $N_x$  seja de tração, será:

$$A_s = \frac{N_x}{f_y d} \text{ cm}^3/\text{m}$$

Os espaçamentos entre os ferros atendem as prescrições da NB - 1/78.

Finalizando, observa-se que as deformações do bordo da casca provocadas pelos esforços de membrana, são incompatíveis com a deformação do anel de bordo (Fig. 7 c) e este fato, gera esforços de flexão que se faz necessário levar em consideração nas cascas de revolução com grandes dimensões. Recomenda-se sempre engrossar um pouco a espessura da casca nas proximidades de seus bordos, com o objetivo de prever os esforços de flexão que surgem devido a incompatibilidade das citadas deformações. (Fig. 17).

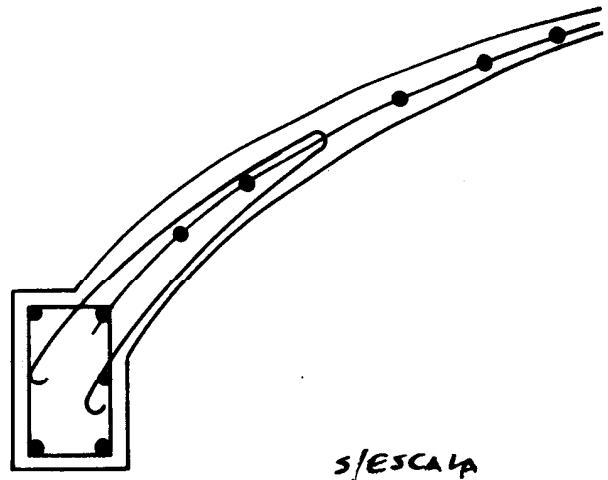


Figura 17

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A. GUERRIN - **Tratado de Concreto Armado**, 2ª ed., São Paulo, Hermes Editora Limitada, 1983.
2. FLUGGE, Wilhelm - **Stress in Shells** 4ª ed., New York, Springer-Verlag New York Inc., 1967.
3. SALVADORI, Mário - **Structural Design in Architecture**, 2ª ed., United State of American, Prentice - Hall Inc., 1967.
4. S. TIMOSHENKO - **Teoria de Placas y laminas**.