PROBLEMAS DE GRANDE PORTE: UMA ABORDAGEM APLICADA A PROGRAMAÇÃO LINEAR

*Plácido Rogério Pinheiro

Resumo

O principal objetivo deste artigo é mostrar técnicas de solução para problemas de grande porte em Programação Linear. Algumas considerações sobre decomposições LU e LQ são apresentadas.

Abstract

The principal purpose of this article is to show techniques of solution for large problems in linear programming. Some considerations about decompositions LU e LQ is expose.

01 - INTRODUÇÃO

Nos problemas com um número elevado de variáveis e restrições, duas dificuldades podem ocorrer com os métodos de otimização descritos nas seções anteriores: o tempo computacional requerido pode tornar-se excessivo para o tipo pretendido de software, ou pode não haver espaço suficiente de armazenagem para conter a matriz necessária para calcular, por exemplo, a direção de busca. Felizmente a estrutura de certos problemas de grande porte permite sua abordagem por métodos eficazes que respondem, ao menos parcialmente, a estas questões.

Um primeiro e importante aspecto estrutural é a razão entre o número de elementos não-nulos e o número total de elementos na matriz, chamada de densidade. A matriz com um número reduzido de zeros é denominada densa, e se for alta a proporção de zeros é chamada esparsa. Na prática a esparsidade tende a crescer quando o tamanho do problema cresce, com o número de elementos nulos aumentando, por exemplo, linearmente com n.

Além da baixa densidade, as matrizes que ocorrem em grandes problemas tendem quase sempre a ter uma certa estrutura ou modelo. Em uma matriz estruturada os elementos nulos e não-nulos não estão espalhados aleatoriamente, porém são facilmente conhecidas as posições que ocupam na matriz devido à natureza do problema e às relações entre as variáveis. Estas propriedades são utilizadas na formulação de algoritmos, cálculos e armazenagem de modo a se obter economia de tempo e de memória. Por exemplo, a multiplicação envolvendo linhas (ou colunas) da matriz pode ser extremamente simplificada. Um exemplo típico de estrutura é a escada.A resolução de

* Mestre e Doutorando em Ciências da Computação pela COPPE/UFRJ e Professor da Universidade de Fortaleza e Universidade Estadual do Ceará.

problemas de grande porte envolve, além de aspectos operacionais de nível elementar, como a citada multiplicação escalar de vetores ($x^t y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$), também níveis mais elevados, como a resolução de sistemas algébricos lineares de grande dimensão. Por outro lado, a adaptação dos métodos de otimização anteriormente apresentados passa por uma preparação que consiste em decompor o problema original em outros menores, além de relacioná-los entre si, de modo que o modelo decomposto seja equivalente ao original. Nós próximos parágrafos apresentaremos algumas técnicas básicas relativas a estes aspectos, ligando-as ao material apresentado nos parágrafos anteriores.

Simplex

Resolução dos Sistemas Lineares

Consideremos a forma padrão de um problema de programação linear min $c^t x$

$$x \varepsilon R^n$$

$$\text{Sujeito a: } Ax=b \qquad (1)$$

$$1 \leq x \leq u$$

É sabido (Gil, Murray and Wright (1981) que a forma padrão tem significativas vantagens em termos de eficiência computacional e armazenagem para problemas de grande porte.

Suponhamos que existem m restrições de igualdade. Sem perda de generalidade, assumiremos que no ponto x, no mínimo n-m variáveis serão fixadas sobre um de seus limites e neste caso o ponto corrente satisfaz as restrições de igualdade.

$$\hat{A}x = \begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

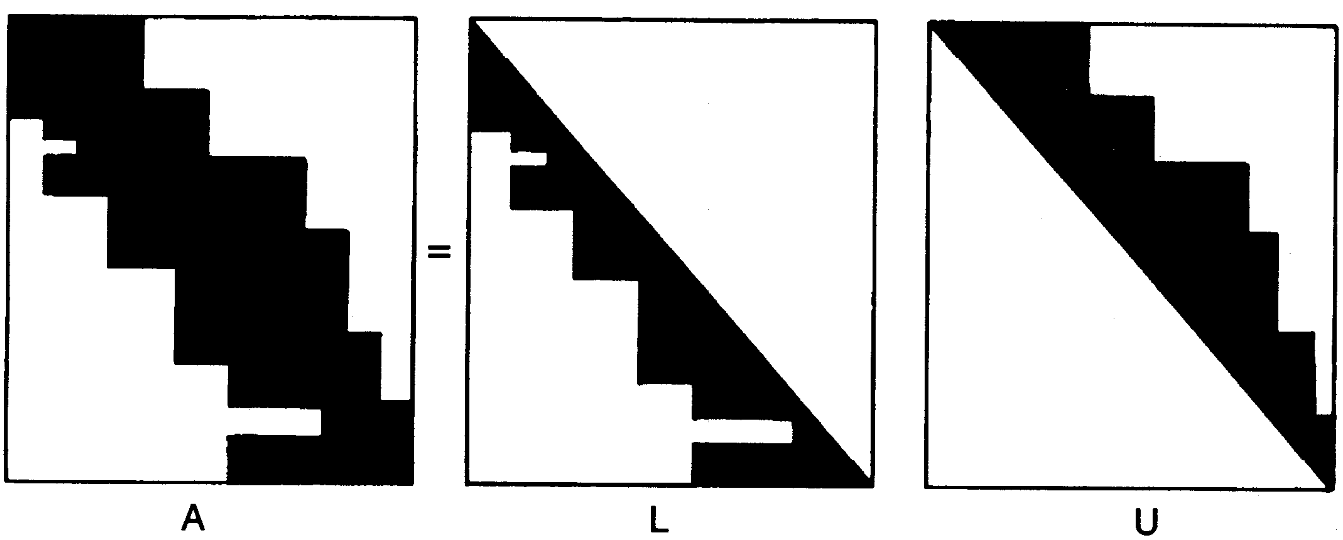
A matriz B é uma seleção de colunas de A que forma uma matriz não-singular mxm, a matriz base. As colunas de A que estão em B são as colunas básicas e as variáveis x definidas por esta partição de A são as variáveis básicas (denotamos por x_b). Similarmente as colunas de N e suas variáveis x_n são as não-básicas. As componentes de b_n são retiradas de 1 ou u, dependendo do limite que está definindo cada variável não-básica. Para cada iteração ótima definimos $\hat{A}$, como um subproblema de restrições de igualdade.

A formulação (2), e variantes, está no cerne dos cálculos do simplex. Ela define um dos subproblemas básicos que é a resolução de sistemas lineares cuja matriz é B ou B^T.

As mais modernas implementações do método simplex para problemas de programação linear de grande porte usam fatoração LU (produto de uma matriz triangular inferior L e uma superior U) para a solução de tais sistemas. A resolução de Bx=b é encontrada ao se resolver Ux=y, por substituição direta, sendo y solução do sistema triangular Ly=b. A solução eficiente de um problema linear com um número muito grande de variáveis é possível se a matriz A é suficientemente esparsa. Neste caso, os elementos não-nulos da fatoração LU de B poderiam ser armazenados na memória do computador. A decomposiição LU é particularmente bem adaptada para matrizes tipo faixa em que elementos não-nulos estão concentrados como na figura 1; as matrizes L e U mantém a estrutura da matriz original.

Figura 1. A=LU, com L(resp. U) mantendo a estrutura abaixo (resp. acima) da diagonal principal de A. Os elementos não nulos estão todos no interior da faixa.

As duas técnicas mais eficientes para fatoração LU estão nos trabalhos clássicos de Forrest e Tomlin (1972) e Bartels e Golub (veja Bartels, 1971).



Outra decomposição usada é a fatorização triangular-ortogonal LQ, ou com Q não armazenada (Gil e Murray, 1973), ou com Q armazenada como produto de uma matriz diagonal e outra ortogonal (Gil, Murray e Saunders, 1975). Embora mais complexa, tem a vantagem da estabilidade, útil em problemas com soluções sensíveis a pequenas variações nos dados e erros de arredondamento computacional acumulados.

PROGRAMAÇÃO LINEAR GENERALIZADA

A programação linear generalizada é uma extensão da programação linear a problemas de grande porte. A diferença básica entre um problema de programação linear e um de programação linear generalizada está no método de solução, que apesar de ser o mesmo, o SIMPLEX, difere na maneira como se escolhe a coluna de entrada na base a cada iteração. Na programação linear exibem-se todas as colunas até se encontrar aquela que irá entrar na base, enquanto que na programação linear generalizada existe uma maneira de se fazer isso sem que seja necessário listar todas as colunas. Essa maneira é o método de geração de colunas, que gera a coluna de entrada na base, quando necessário. Assim, apenas um pequeno número de colunas é realmente examinado e o espaço de armazenagem exigido por elas no computador torna-se bem menor. Esse método garante, portanto economia de tempo e memória.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. BARTELS, R.H. - A Stabilization of the simplex method, Num. Math. 1971. 16, pp 414-434.

02. FOREST, J.J. And Tomlin, J.A. - Updating triangular factors of the basis to maintain sparsity in the product form simplex method, Math. Prog. 1972. 2, pp 263-278.

03. GILL, P. E and Murray, W. - A numerically stable form of the simplex method, Linear Algebra and its Applics. 1973. 7, pp. 99-138.

04. GILL, P.E., Murray W and Sauders, M.A. Methods for computing and modifying the LDV factors of a matriz, Mathematics of Computations 29, pp. 1051-1077. 1975

05. GILL, P.E., Murray, W., Wright, M.H. - Practical Optimization. Academic Press, New York. 1981.