

CASCAS CILÍNDRICAS

* Benedito Torquato de Oliveira

Resumo

O presente artigo, objetiva de maneira didática, mostrar as deduções das equações de equilíbrio para o cálculo dos esforços que se desenvolvem nas cascas cilíndricas através da Teoria de Membrana. Feito isso, faremos algumas aplicações de ordem prática.

Abstract

The present article, has the objective to deduce with a didactic way the equilibrium equations to the calculation of strains in the membrane of cylindrical shells. We will make applications in the practice order.

1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES.

Na montagem das equações de equilíbrio de uma casca, cuja superfície média é cilíndrica, submetida a esforços externos, iremos sempre supor o que se segue:

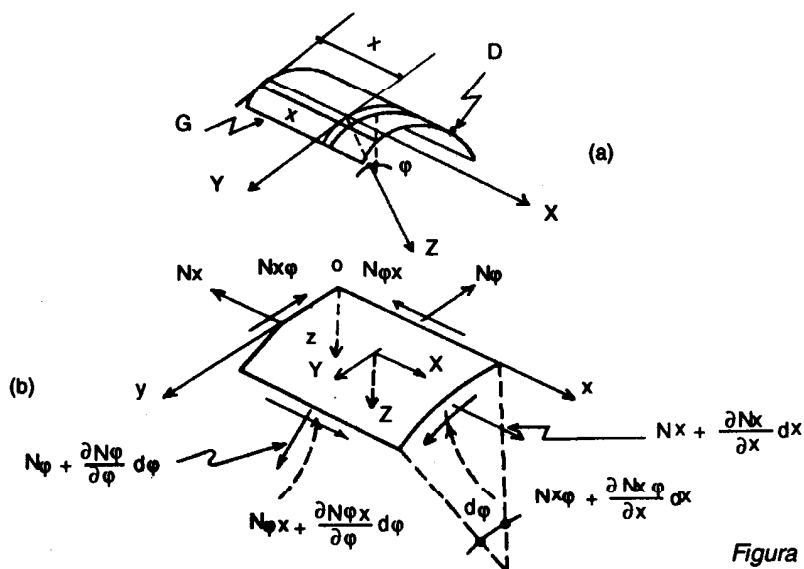


Figura - 01

* Eng. Civil e Matemático DNER, Prof. da UNIFOR

- a) O sistema de eixos triretangular é tal, que o eixo dos X coincide com a geratriz (G) da superfície média da casca, o eixo dos Y tangente a curva diretriz (D) ou seção normal e o eixo Z evidentemente normal a superfície média. Fig. 1 (a).
- b) Um elemento infinitesimal da casca, será determinado por duas geratrizes próximas e por duas curvas diretrizes perpendiculares ao eixo dos X. Fig. 1 (a).
- c) A posição desse elemento fica perfeitamente definida, através da coordenada X e do ângulo φ . Fig. 1 (a).
- d) N_x é o esforço normal por unidade de comprimento, que atua na direção do eixo dos X, ou seja, na direção da reta geratriz. Fig. 1 (b).
- e) N_φ é o esforço normal por unidade de comprimento que atua na direção do eixo dos Y, ou seja, na direção da tangente à curva diretriz. Fig. 1 (b).
- f) $N_{\varphi x}$ e $N_{x\varphi}$ são esforços tangenciais por unidade de comprimento que atuam nas direções X e Y respectivamente, ou seja, atuam em planos normais a superfície e que contém a reta geratriz e a curva diretriz. Fig. 1 (b).
- g) X, Y e Z são as componentes da carga externa que atuam na casca por unidade de superfície nas direções dos eixos X, Y e Z respectivamente. Fig. 1 (b).
- h) A equação da superfície média da casca, é a equação da curva diretriz num plano paralelo ao YOZ e será:

$$z = f(y)$$

$$x = cte$$

$$i) R_y = \frac{[1 + (\frac{dz}{dy})^2]^{3/2}}{|\frac{d^2z}{dy^2}|}$$

são os raios de curvatura principais da superfície média da casca. (Para o sistema de eixos XYZ adotado, a torção da superfície na origem é nula, ou seja:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

- j) A espessura da casca é muito inferior ao raio de curvatura $R_y = R$ para que se possa desprezar os efeitos da flexão.
- k) A casca será sempre apoiada ou engastada em planos normais as geratrizes (tímpanos) com bordas laterais livres, sem viga de re-

forço. Nestes bordos as tangentes à diretriz será sempre vertical, Fig. 1 (a), porém, se prescindirmos destes tímpanos e apoiarmos a casca cilíndrica através de suas geratrizes externas, não permitindo a livre deformação da mesma, surgirão esforços de flexão importantes, a menos que sua diretriz coincida com a linha de pressões, conforme veremos adiante.

2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Considerando o equilíbrio do elemento infinitesimal indicado na Fig. 1 (b), a Estática nos fornece:

$$a) \sum M_z = N_{x\varphi} (R d\varphi) dx - N_{\varphi x} dx R d\varphi = 0$$

$$\therefore N_{x\varphi} = N_{\varphi x} \quad (I)$$

$$b) \sum F_x = (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot dx) R \cdot d\varphi + (N_{\varphi x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} \cdot dx) \cdot R d\varphi - N_x R d\varphi - N_{\varphi x} dx + x (R d\varphi) dx = 0$$

que simplificando, vem:

$$\therefore \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = -x \dots \dots \dots (II)$$

$$c) \sum F_y = (N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} \cdot d\varphi) dx + (N_{x\varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} dx) \cdot R \cdot d\varphi - N_\varphi dx - N_{x\varphi} R d\varphi + \varphi (R d\varphi) dx = 0$$

que simplificando, vem:

$$\therefore \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = -y \dots \dots \dots (III)$$

$$d) \sum F_z = (N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi) dx \sin d\varphi + (N_{x\varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} dx) \cdot R d\varphi \sin \frac{d\varphi}{2} - N_\varphi R d\varphi \sin \frac{d\varphi}{2} + z (R \cdot d\varphi) dx = 0$$

$$R d\varphi \sin \frac{d\varphi}{2} - N_{x\varphi} R d\varphi \sin \frac{d\varphi}{2} + z (R \cdot d\varphi) dx = 0$$

que simplificando e eliminando os infinitésimos de ordem superior, vem:

$$\therefore N_\varphi = -Rz \dots \dots \dots (IV)$$

Integrando as equações de equilíbrio II e III, temos como resultado:

$$N_{x\varphi} = - \int (y + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi}) dx + c_1(\varphi) \dots \dots \dots (V)$$

$$N_x = - \int (x + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi}) dx + c_2(\varphi) \dots \dots \dots (VI)$$

$c_1(\varphi)$ e $c_2(\varphi)$ são funções somente de φ e são de-

terminadas através das condições particulares de contorno da casca, ou seja, das condições de apoio dos bordos. As equações (IV), (V) e (VI) resolvem o problema das cascas cilíndricas para os casos simples de carregamentos.

Note-se que nos bordos laterais sem viga de reforço, deve-se ter $N_\phi = 0$ (bordo livre), Fig. 2 (a) logo, tal condição pela equação (IV), só é possível quando $Z = 0$, Fig. 2 (b).

Conclui-se então, que o cálculo das cascas cilíndricas como membranas e com as hipóteses adotadas, só é válido quando a tangente ao bordo lateral for vertical, ou ainda para o caso de carregamento externo cuja componente Z seja nula no bordo lateral livre, ou seja, no caso em que a tangente à diretriz coincida com a linha de pressões do carregamento, conforme veremos adiante.

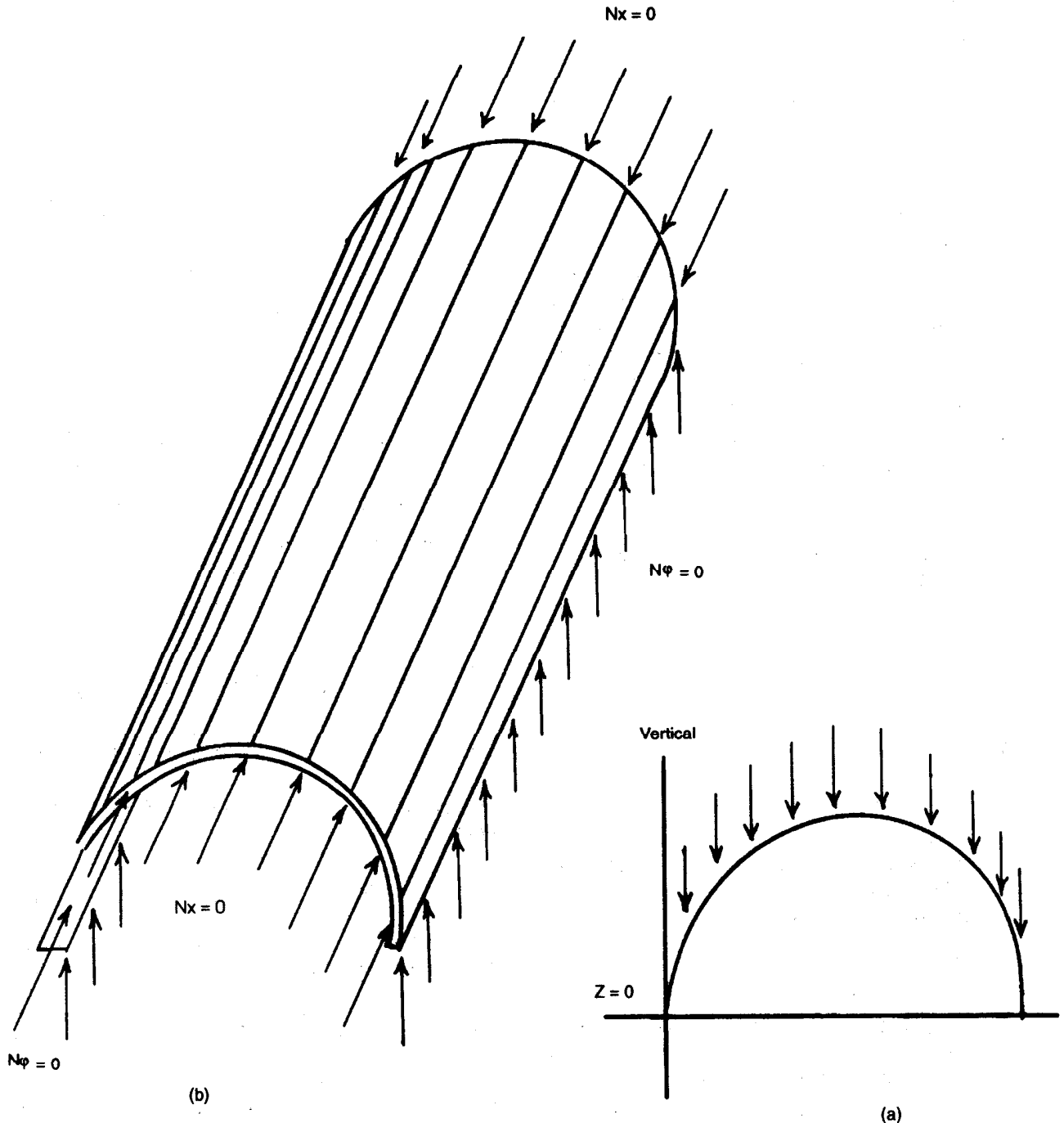


Figura - 02

Agora, nos resta observar que $N\phi x$ não se anula nos bordos laterais livres, sendo necessário se calcular armadura de tração dispostas ao longo desses bordos, capaz de absorver os citados esforços.

O funcionamento da casca como membrana, praticamente não será perturbado se projetar um pequeno aumento na espessura dos bordos de aproximadamente o dobro da espessura da casca e nunca inferior a 15cm, numa extensão de 1m. para cima, conforme Fig. 03, com finalidade de abrigar a armadura de combate aos esforços $N\phi x$.

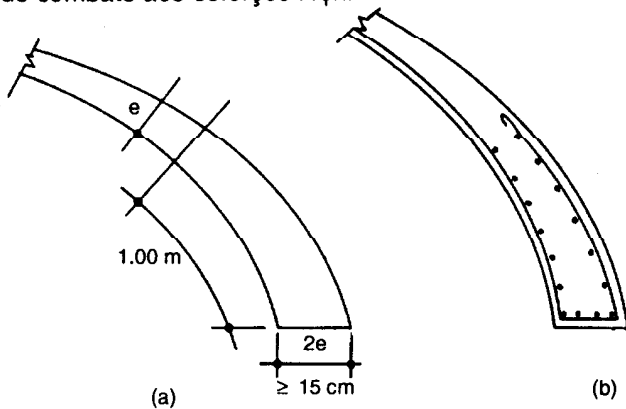


Figura - 03

A intensidade da força de tração T , numa seção de abscissa $x > \frac{1}{2}$ provocada por $N\phi x$ e desenvolvida na armadura, será:

$$dT = |N\phi x| dx$$

$$T = \int_x^l |N\phi x| dx, \text{ para } \phi = 90^\circ \quad (VII)$$

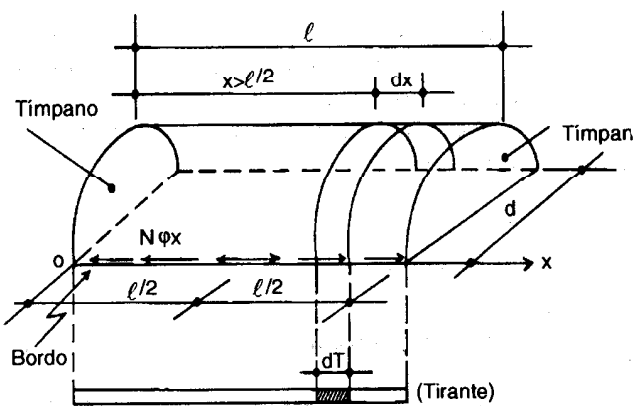


Figura - 04

Determinados os esforços N_x , N_ϕ e $N\phi x$ para os diversos pontos da casca e pelas suas coordenadas x e ϕ , parte-se para a determinação dos esforços principais e suas orientações em cada um dos pontos acima referidos, mediante as formulas já conhecidas da resistência dos materiais:

$$\operatorname{tg} 2 \phi_0 = \frac{2.N\phi x}{N_x - N_\phi}$$

$$N_1 = \frac{N_x + N_\phi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(N_x - N_\phi)^2 + 4 N\phi^2 x}$$

$$N_2 = \frac{N_x + N_\phi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(N_x - N_\phi)^2 + 4 N\phi^2 x}$$

$$N\phi x (\max) = \frac{N_1 - N_2}{2}$$

com esses esforços, procede-se então, o dimensionamento.

3. APLICAÇÕES PRÁTICAS.

- Cilindro circular de raio a e vão L , cheio com um líquido de peso específico γ e apoiado nas extremidades. Fig. 05.

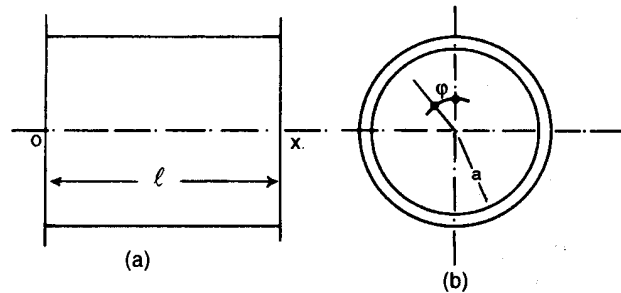


Figura - 05

Tem-se

$$R = a$$

$$X = Y = 0$$

P_0 = pressão no eixo do tubo.

P = pressão no ponto P da superfície do tubo.

$$P = \gamma h = \gamma (a - a \cos \phi) = P_0 - \gamma a \cos \phi$$

$$Z = -P = -P_0 + \gamma a \cos \phi$$

substituindo-se na expressão (IV), vem:

$$N\phi = -a (P_0 + \gamma a \cos \phi)$$

$$\therefore N\phi = P_0 \cdot a - \gamma a^2 \cos \phi \quad (a)$$

$$\therefore \frac{\partial N\phi}{\partial \phi} = \gamma a^2 \operatorname{sen} \phi$$

A equação (V) fornece:

$$N_x \phi = - \int_0^x (P_0 + \frac{1}{a} \cdot \gamma a^2 \operatorname{sen} \phi) dx + c_1(\phi)$$

$$N_x \phi = - \int_0^x \gamma a \operatorname{sen} \phi dx = -\gamma a \operatorname{sen} \phi x + c_1(\phi) \quad (b)$$

$$\therefore \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = -\gamma a \cos \varphi x + \frac{dc_1(\varphi)}{d\varphi}$$

A equação (VI) fornece:

$$N_x = -\int_0^x \left[0 + \frac{1}{a} \cdot (-\gamma a \cos \varphi x + \frac{dc_1(\varphi)}{d\varphi}) \right] dx + c_2(\varphi)$$

simplificando a expressão acima, teremos:

$$N_x = \frac{1}{2} \gamma \cos \varphi x^2 - \frac{x}{a} \cdot \frac{dc_1(\varphi)}{d\varphi} + c_2(\varphi) \quad (c)$$

As funções $C_1(\varphi)$ e $C_2(\varphi)$ são determinadas a partir das condições de contorno dos bordos. Supondo que não existe forças N_x nas extremidades do cilindro, vem:

Para $X = 0$, tem-se $N_x = 0$

a equação (C), fornece: $C_2(\varphi) = 0$

Para $X = L$, tem-se $N_x = 0$ e, novamente a equação (C), fornece:

$$0 = \frac{1}{2} \gamma \cos \varphi \cdot L^2 - \frac{L}{a} \cdot \frac{dc_1(\varphi)}{d\varphi} + 0$$

$$\therefore \frac{1}{a} \cdot \frac{dc_1(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\gamma L \cos \varphi}{2}$$

$$\therefore \frac{dc_1(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\gamma a L}{2} \cos \varphi$$

$$\therefore c_1(\varphi) = \frac{\gamma a L}{2} \sin \varphi + c$$

Levando a expressão acima na equação (b), vem:

$$N_{x\varphi} = -\gamma a \sin \varphi x + \frac{a \gamma L}{2} \sin \varphi + c$$

Na expressão acima, conclui-se que C representa esforços $N_{x\varphi}$ uniformemente distribuídas ao longo das seções transversais e longitudinais, como se o tubo estivesse submetido a uma torção. Como por hipótese, não existe torção no tubo, deve-se tornar $C = 0$ e finalmente, as equações a, b e c, fornecem:

$$N_{\varphi} = P_0 a - \gamma a^2 \cos \varphi$$

$$N_{x\varphi} = \gamma a \left(\frac{L}{2} - x \right) \sin \varphi$$

$$N_x = -\frac{\gamma}{2} x (L - x) \cos \varphi$$

- b) Casca cilíndrica semi-circular de raio a , em balanço de vão L , submetida a ação de seu peso próprio g por unidade de superfície. Fig. 06.

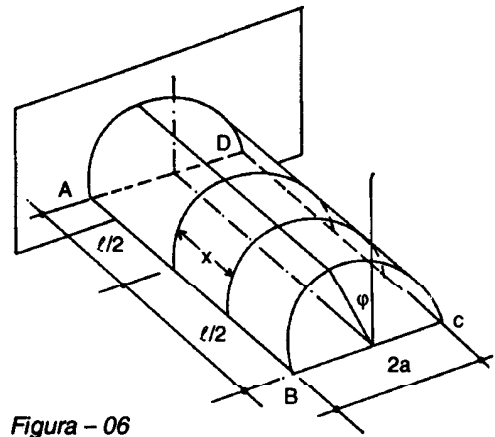


Figura - 06

Para este caso, temos:

$$R = a$$

$$X = 0$$

$$Y = g \sin \varphi$$

$$Z = g \cdot \cos \varphi$$

A equação (IV), fornece:

$$N_{\varphi} = -a \cdot g \cdot \cos \varphi \quad (d)$$

$$\therefore \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} = a \cdot g \cdot \sin \varphi$$

A equação (V) fornece:

$$N_{x\varphi} = -\int_0^x (g \sin \varphi + \frac{1}{a} \cdot a \cdot g \sin \varphi) dx + c_1(\varphi)$$

$$N_{x\varphi} = -2g \sin \varphi x + c_1(\varphi) \quad (e)$$

Tomando-se a origem das coordenadas no centro do balanço de vão L e admitindo-se as mesmas condições nos bordos extremos $x = \pm L/2$ pode-se concluir que por razões de simetria quando $x = 0$, tem-se $N_{x\varphi} = 0$ e a expressão (d) fornece:

$c_1(\varphi) = 0$, logo:

$$N_{x\varphi} = -2g \sin \varphi x$$

$$\therefore \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = -2g \cos \varphi x \quad (f)$$

substituindo-se a expressão acima na equação (VI), vem:

$$N_x = -\int \left[0 + \frac{1}{a} (-2g \cos \varphi x) \right] dx + c_2(\varphi)$$

$$\therefore N_x = \frac{1}{a} \cdot 2g \cos \varphi \frac{x^2}{2} + c_2(\varphi)$$

$$\therefore N_x = \frac{g \cdot \cos \varphi x^2}{a} + c_2(\varphi)$$

Agora para $x = \pm \frac{L}{2}$, tem-se $N_x = 0$.

$$0 = \frac{g \cos \varphi L^2}{4a} + c_2(\varphi)$$

$$\therefore c_2(\varphi) = -\frac{\cos \varphi L^2}{4a} c$$

$$\therefore N_x = \frac{g \cdot \cos \varphi x^2}{a} - \frac{g \cdot \cos \varphi L^2}{4a} c$$

$$\therefore N_x = -\frac{g \cdot \cos \varphi}{4a} (L^2 - 4x^2) \quad (g)$$

As expressões (d), (f) e (g) resolvem o problema.

- c) Casca cilíndrica semi-circular de raio "a" e vão "L", apoiada nos tímpanos, submetida à ação do peso próprio "g" por unidade de superfície.

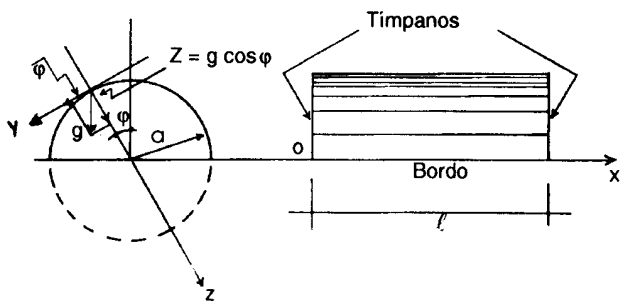


Figura - 7

No caso em apreço, teremos:

$$R = a$$

$$X = 0$$

$$Y = g \sin \varphi$$

$$Z = g \cos \varphi$$

que substituindo-se na equação (IV), vem:

$$N\varphi = -a g \cos \varphi \quad (h)$$

$$\therefore \frac{\partial N\varphi}{\partial \varphi} = a g \sin \varphi$$

A equação (V), vem:

$$N_x \varphi = -\int_0^x [g \cdot \sin \varphi + \frac{1}{a} (a \cdot g \sin \varphi)] dx + c_1(\varphi)$$

$$\therefore N_x \varphi = -\int_0^x 2g \sin \varphi dx + c_1(\varphi)$$

$$\therefore N_x \varphi = -\int_0^x 2g \sin \varphi x + c_1(\varphi)$$

Por razões de simetria, teremos $N_x \varphi = 0$ para

$x = \frac{L}{2}$, que substituindo-se na expressão acima, teremos:

$$0 = -2g \cdot \sin \varphi \cdot \frac{L}{2} + c_1(\varphi)$$

$$\therefore C_1(\varphi) = g \cdot L \cdot \sin \varphi$$

logo, para $N_x \varphi$, teremos:

$$\therefore N_x(\varphi) = -2g \sin \varphi x + g \cdot \sin \varphi L$$

$$\therefore N_x \varphi = g \sin \varphi (L - 2x) \quad (i)$$

$$\therefore \frac{\partial N_x \varphi}{\partial \varphi} = g \cdot \cos \varphi (L - 2x)$$

substituindo-se a expressão acima, na equação (VI), teremos:

$$N_x = -\int_0^x \left\{ 0 + \frac{1}{a} [g \cdot \cos \varphi (L - 2x)] \right\} dx + c_2(\varphi)$$

$$\therefore N_x = -\frac{g \cdot L \cdot \cos \varphi}{a} x + \frac{g \cos \varphi}{a} x^2 + c_2(\varphi)$$

Admitindo-se que $N_x = 0$, para $x = 0$ e $x = L$, conclui-se que:

$$C_2(\varphi) = 0$$

logo:

$$\therefore N_x = \frac{-g \cdot \cos \varphi x}{a} (L - x) \quad (j)$$

As equações (h), (i) e (j), resolvem o problema.

Quanto a força de tração T nos bordos, em um ponto de abscissa $\{x \text{ sobre } \{L\} \text{ over } \{2\}\}$ a equação (VII) nos fornece:

$$T = \int_x^L |N_x \varphi| dx = \int_x^L g \cdot \sin \varphi (L - 2x) dx$$

Para $\varphi = 90^\circ$ vem:

$$T = \int_x^L g (L - 2x) dx = g \cdot (L - x) x$$

a força de tração máxima, ocorrerá no centro do vão, cujo valor é:

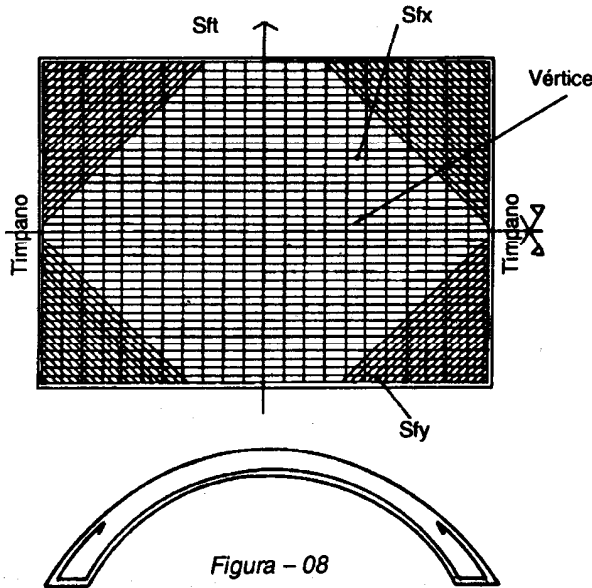
$$T_{\max} = \frac{g \cdot L^2}{4}$$

A armadura para combater este esforço de tração numa seção de abscissa x, será:

$$A_s = \frac{T_1}{f_{yd}} = \frac{g}{f_{yd}} (Lx - x^2)$$

Como se observa na expressão acima, a ar-

madura de tração diminui até se anular nos tímpanos de apoio. A armadura máxima, ocorre no centro do bordo ($x = L/2$) e seu valor será $A_s = \frac{gL^2}{4f_{yd}}$. Os ferros que sobrando ao absorver estes esforços de de tração, podem ser dobrados a 45° para o combate às tensões de cisalhamento provocadas pelo esforço $N_{x\phi}$.



Finalmente deve-se verificar as tensões de cisalhamento pela fórmula:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{(N_{\phi x})_{\text{Máx}}}{100 \cdot e} = \frac{2 \cdot g \cdot L}{100 \cdot e} \leq 15 \text{ kgf/cm}^2$$

onde "e", é a espessura da casca. ($6 \text{ cm} \leq e \leq 8 \text{ cm}$).

- d) Casca cilíndrica semi-circular de raio "a" e vão "L", apoiada nos tímpanos, submetida à ação de uma sobrecarga vertical "P" por unidade de projeção horizontal.

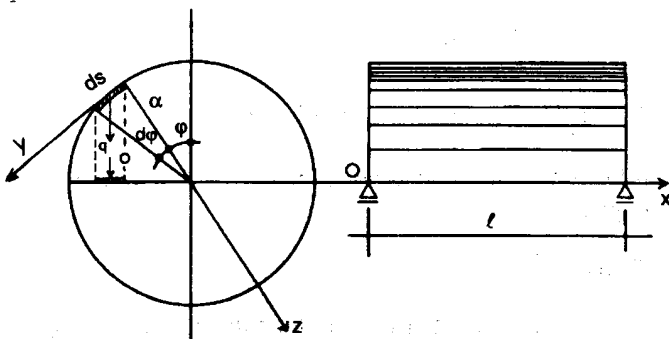


Figura - 09

teremos:

$$qds = P ds \cos \phi$$

$$\therefore qds = P \cos \phi$$

logo:

$$R = a$$

$$X = 0$$

$$Y = q \sin \phi = P \sin \phi \cos \phi$$

$$Z = q \cos \phi = P \cos^2 \phi$$

Substituindo-se os valores acima na equação (IV), vem:

$$N_{\phi} = - a P \cos^2 \phi \quad (k)$$

$$\therefore \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} = 2 P \cdot a \cos \phi \sin \phi$$

que substituindo-se na equação (V), teremos:

$$N_{x\phi} = - \int_0^x (P \cdot \sin \phi \cos \phi + \frac{1}{a} 2 a P \cos \phi \sin \phi) dx + c_1(\phi)$$

$$N_{x\phi} = - \int_0^x 3 P \sin \phi \cos \phi dx + c_1(\phi)$$

$$N_{x\phi} = - \frac{3}{2} \sin 2 \phi P x + c_1(\phi)$$

Por simetria tem-se $N_{x\phi} = 0$ para $x = L/2$, e a equação acima fica:

$$0 = \frac{3}{2} \sin 2 \phi P \frac{L}{2} + c_1(\phi)$$

$$c_1(\phi) = \frac{3}{4} \sin 2 \phi P L$$

logo:

$$N_{\phi x} = - \frac{3}{2} \sin 2 \phi P x + \frac{3}{4} \sin 2 \phi P L$$

$$\therefore N_{\phi x} = - \frac{3}{2} \sin 2 \phi P (x - \frac{L}{2}) \quad (l)$$

$$\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = - \frac{3}{2} P (x - \frac{L}{2}) 2 \cos 2 \phi$$

$$\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = - 3 P (x - \frac{L}{2}) \cos 2 \phi$$

substituindo-se a expressão acima na equação (VI), teremos:

$$N_x = - \int_0^x \left\{ 0 + \frac{1}{a} [- 3 P (x - \frac{L}{2}) \cos 2 \phi] \right\} dx + c_2(\phi)$$

$$N_x = \int_0^x \frac{3P}{a} (x - \frac{L}{2}) \cos 2 \phi dx + c_2(\phi)$$

$$N_x = \int_0^x \frac{3P}{a} \cos 2 \phi x dx - \int_0^x 3 P \frac{L}{2} \cos 2 \phi dx + c_2(\phi)$$

$$N_x = \frac{3P}{a} \cos 2\varphi \frac{x^2}{2} - 3P \frac{L}{2a} \cos 2\varphi x + c_2(\varphi)$$

$$N_x = \frac{3P}{2a} \cos 2\varphi (x^2 - Lx) + c_2(\varphi)$$

$$N_x = \frac{3P \cos 2\varphi}{2a} x(x - L) + c_2(\varphi)$$

Admitindo-se que $N_x = 0$, para $x = 0$ e $x = L$, vem:

$$C_2(\varphi) = 0$$

$$N_x = \frac{3}{2a} P \cos 2\varphi (x - L) \quad (m)$$

As expressões (k), (l) e (m), resolvem o problema.

A força de tração nos tirantes de bordo em um ponto do bordo de abscissa x , será dada pela equação (VII), logo:

$$T = \int_x^L |N_x \varphi| dx = \int_x^L \frac{3}{2} \sin 2\varphi P (x - \frac{L}{2}) dx$$

$$T = \frac{3}{2} P \sin 2\varphi \int_x^L (x - \frac{L}{2}) dx$$

$$T = \frac{3P}{2} \sin 2\varphi \left[\frac{(L^2 - x^2)}{2} - \frac{L(L-x)}{2} \right]$$

$$T = \frac{3P}{4} \sin 2\varphi [L^2 - x^2 - L(L-x)]$$

$$T = \frac{3P}{4} \sin 2\varphi [(L-x)(L-x) - L(L-x)]$$

$$T = \frac{3P}{4} \sin 2\varphi (L-x)(L-x-L)$$

$$T = \frac{3P}{4} \sin 2\varphi (L-x)x$$

para $\varphi = 90^\circ$ (bordos)

$$T = \frac{3P}{4} (L-x)x$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cálculo das cascas admitidas neste trabalho, tratamos segundo a Teoria de Membrana, só tem validade, quando a casca tiver diretriz com tangente vertical nos bordos ($Z = 0$) e ainda mais, sem vigas de reforço (Bordos livres). Quando estas condições não forem obedecidas, surgirão esforços de bordos, cujo combate se faz através de vigas de reforço nos bordos laterais. (Fig. 09). Estas vigas, ao se deformarem provocam perturbações devido a incompatibilidade de deformações com a casca, dando lugar a esforços de flexão importantes e o cálculo agora, será produzido de acordo com a teoria de flexão das cascas cilíndricas. Cabe finalmente observar que só deve utilizar a teoria de membrana, no cálculo das cascas cilíndricas,

cas, obedecendo-se as hipóteses admitidas as quais limitam muito o emprego para vãos $6m \leq d \leq 8m$. Fig. 04. Além desses limites, deve-se utilizar a teoria da flexão das cascas cilíndricas e que será vista posteriormente.

Note-se que poderíamos chegar as mesmas conclusões, partindo da equação de função de tensão ϕ de A. Pucher, conforme se segue.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \\ & = -z + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \int_{x_0}^x x dx + \\ & + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int_{y_0}^y y dy \end{aligned} \quad (n)$$

Em toda superfície cilíndrica com geratriz paralela ao eixo dos X, tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$X=0$ (simetria de carregamento em relação ao eixo).

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \int_{x_0}^x X dx = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (o)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \int_{y_0}^y Y dy \quad (p)$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (q)$$

substituindo-se esses valores na equação (n), teremos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -z + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int_{y_0}^y y dy$$

da equação (p), vem:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = N_y + \int_{y_0}^y y dy$$

que substituindo-se na equação acima, fica:

$$\left(N_y + \int_{y_0}^y y dy \right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -z + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int_{y_0}^y y dy$$

que simplificando, teremos:

$$N_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -Z + y \frac{\partial z}{\partial y} \quad (r)$$

Nos bordos laterais livres, devemos ter $N_y = 0$ (Fig. 10) que substituindo-se em (r), vem:

$$0 = -Z + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{Z}{y} = \operatorname{tg}\theta$$

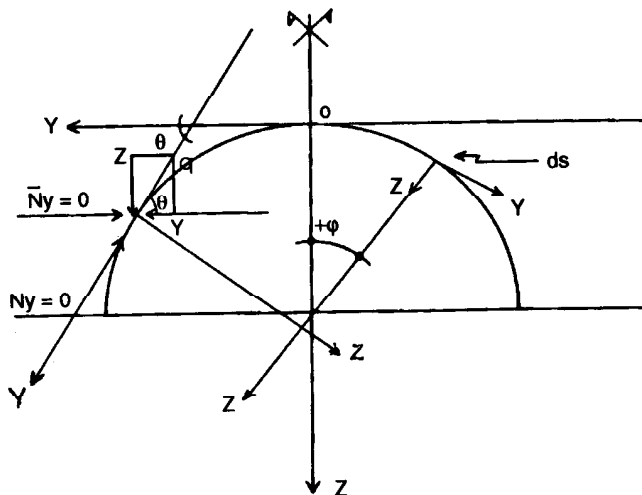


Figura - 10

Conclui-se que o cálculo dos esforços nas cascas cilíndricas pela Teoria de membrana, só é válido para o caso em que os bordos livres a tangente à diretriz, coincida com a linha de pressões do carregamento q .

Quando a componente $Y = 0$ tem-se $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\theta = \infty$,

ou seja, a tangente nos bordos, obrigatoriamente será vertical. O cálculo pode ser efetivado através das equações (0), (p), (g) e (r).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A. GUERRIN - **Tratado de Concreto Armado** 2ª ed., São Paulo, Hermes Editora Limitada, 1983.
2. FLÜGGE, Wilhelm - **Stress in Shells**, 4ª ed., New York, Springer-Verlag New York Inc., 1967.
3. SALVADORI, Mário - **Structural Design in Architecture**, 2ª ed., United States of America, Prentice-Hall Inc., 1967.
4. S. TIMOSHENKO - **Teoria de placas y laminas**.