DESLOCAMENTOS NAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

*Benedito Torquato de Oliveira

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade estudar os deslocamentos de pontos da superfície média das cascas de revolução com cargas simétricas em relação a seu eixo e fornece também um embasamento à Teoria de Flexão das Cascas.

ABSTRACT

The present artcle has the finality to study the displacements of the mean surface points of the revolutions shells with Symmetrical charges in relations to yours spindle and provide too a base to flexion shells theory.

a) DEDUÇÕES DAS FÓRMULAS DE DESLOCAMENTOS

Considere uma casca de revolução submetida a ação de uma carga simétrica em relação ao seu eixo. Com aplicação das cargas, a casca se deforma e conseqüentemente o deslocamento de um ponto da superfície média pode ser decomposto em duas componentes: V na direção da tangente Y ao meridiano e W na direção da normal Z à superfície média da casca. Devido a simetria da casca e do carregamento, a componente μ do deslocamento do mesmo ponto da superfície média na direção da tangente X é nula.

O pequeno deslocamento tangencial do ponto A sendo v, o de B será $v + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right) d\varphi$, (Fig. 1a) logo, podemos afirmar que o elemento de arco $\overset{\frown}{AB}$ sofre uma distenção igual a:

$$\Delta_1 (\overset{\frown}{AB}) = \upsilon + \left(\frac{d\upsilon}{d\varphi}\right) d\varphi - \upsilon = \left(\frac{d\upsilon}{d\varphi}\right) d\varphi$$

O pequeno deslocamento radial do ponto A será W, o de B, $W + \frac{dw}{d\varphi} d\varphi$ (Fig. 1b), então, o elemento de arco $\overset{\frown}{AB}$ sofre um encurtamento igual a:

* *Engº Civil e bacharel em Matemática, Professor do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade de Fortaleza*

$\Delta_1 = R_y\,d\varphi - (R_y - w)\,d\varphi = w\,d\varphi$, **desprezando dw em relação a Ry, a variação total de comprimento do elemento, será:**

$$\Delta(\overset{\frown}{AB}) = \Delta_1(\overset{\frown}{AB}) - \Delta_2(\overset{\frown}{AB}) = \frac{d\upsilon}{d\varphi}\,d\varphi - w\,d\varphi$$

A deformação relativa da casca na direção do meridiano ε_y, será:

$$\varepsilon_y = \frac{A(\overset{\frown}{AB})}{AB} = \frac{\frac{d\upsilon}{d\varphi}\,d\varphi - w\,d\varphi}{AB}$$

mas como $\overset{\frown}{AB} = R_y\,d\varphi$, teremos:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{R_y}\cdot\frac{d\upsilon}{d\varphi} - \frac{w}{R_y} \qquad (1)$$

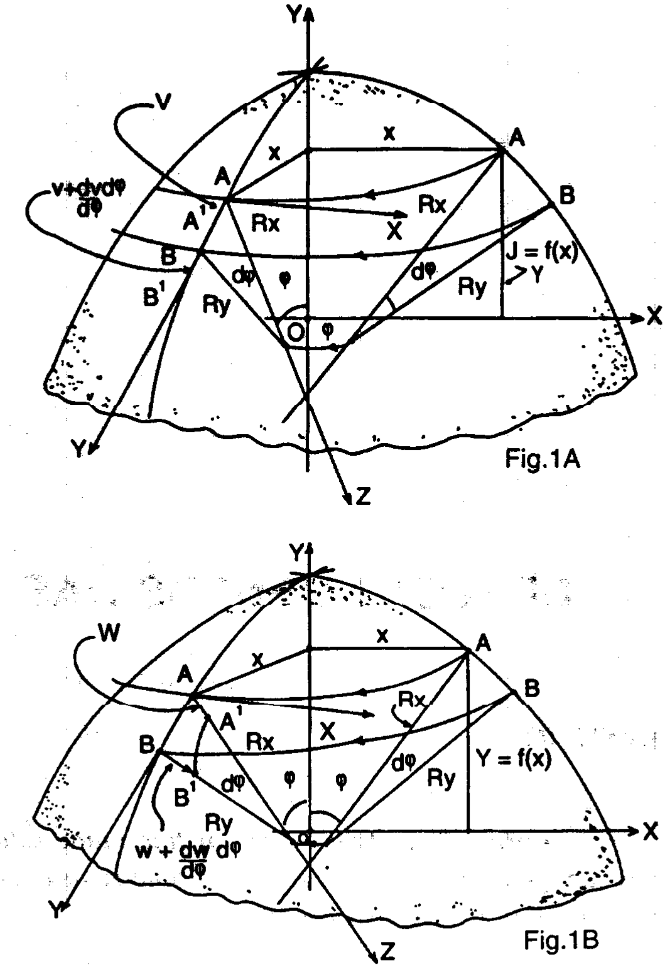

FIGURA 1

Agora considerando-se um paralelo da casca passando por A, observa-se que devido aos deslocamentos V e W, o raio X (Fig. 02), cresce de uma quantidade igual a:

$\Delta x = \upsilon \cos\varphi - w \operatorname{sen}\varphi$

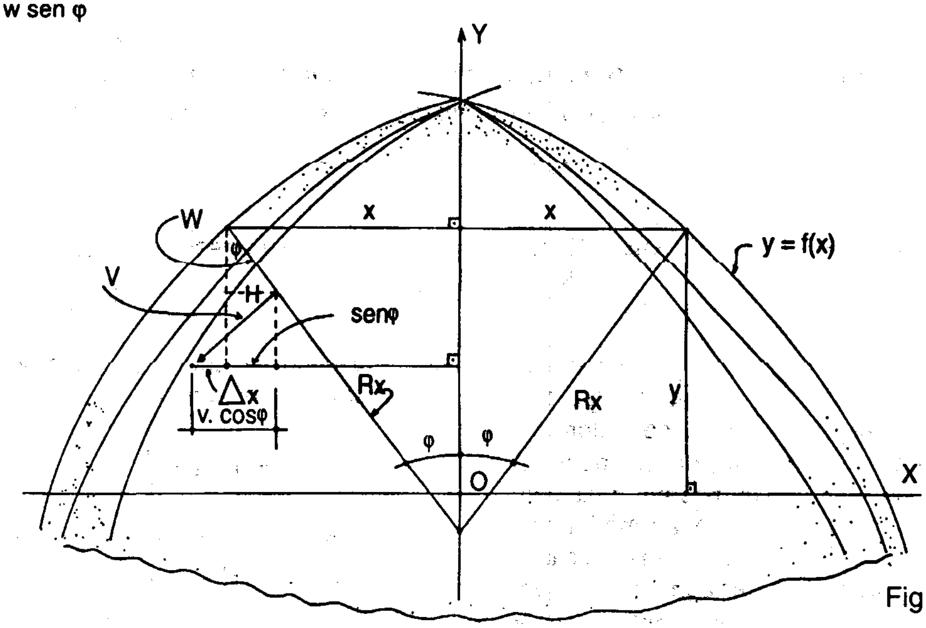

Fig. 2

A circunferência do paralelo que passa por A, sofre uma deformação relativa igual a:

$$\varepsilon_x = \frac{2\Pi(x + \Delta x) - 2\Pi x}{2\Pi x} = \frac{2\Pi\Delta x}{2\Pi x} = \frac{\Delta x}{x}$$

mas, $\Delta x = v\cos\varphi - w\operatorname{sen}\varphi$, logo:

$$\varepsilon_x = \frac{v\cos\varphi - w\operatorname{sen}\varphi}{x}$$

como $X = R_x \operatorname{sen}\varphi$, que substituindo-se na expressão acima, teremos:

$$\varepsilon_x = \frac{v}{R_x}\operatorname{cotg}\varphi - \frac{w}{R_x} \qquad (2)$$

Eliminando-se W entre as equações (1) e (2), obtém-se a seguinte equação diferencial em v

$$\frac{dv}{d\varphi} - v\,\text{cotg}\,\varphi = Ry\,\varepsilon y - Ry\,\varepsilon x \qquad (3)$$

Sabe-se porém, que pela lei de Hooke se tem:

$$\varepsilon y = \frac{1}{Eh}\left(Ny - \sqrt{\ } Nx\right) \qquad (4a)$$

$$\varepsilon x = \frac{1}{Eh}\left(Nx - \sqrt{\ } Ny\right) \qquad (4b)$$

Nas expressões das deformações especificadas dados acima, tem-se:

"E" é o módulo de elasticidade longitudinal do material da casca.

" h" é a espessura da casca.

" Nx" e "Ny" são esforços de membrana por unidade de comprimento que atuam nas direções X e Y respectivamente.

$\sqrt{\ }$ é o coeficiente de Poisson do material da casca.

Substituindo-se as expressões (4a) e (4b) na equação (3), vem:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v\,\text{cotg}\,\varphi = \frac{1}{Eh}\left[N\varphi(Ry + \sqrt{\ } Rx) - \right.$$

$$\left. - Nx(Rx + \sqrt{\ } Ry)\right] \qquad (5)$$

Observa-se que o segundo membro da expressão acima é função de φ logo para todos os casos particulares, podemos expressar o segundo membro de (5) por $f(\varphi)$ e teremos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v\,\text{côtg}\,\varphi = f(\varphi) \qquad (6)$$

A equação (6), é uma equação diferencial de primeira ordem, com o segundo membro variável cuja solução foi engenhosamente proposta por lagrange, através da sua paradoxal Teoria das Constantes variáveis, senão vejamos:

I) Admite-se em primeiro lugar que o segundo membro de (6) seja nulo. A solução vem através de variáveis e será:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v\,\text{cotg}\,\varphi = 0$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = v\,\text{cotg}\,\varphi$$

$$\frac{dv}{v} = \text{cotg}\,\varphi\, d\varphi$$

$$\ln v = \int \text{cotg}\,\varphi\, d\varphi = \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\text{sen}\,\varphi}$$

$$\ln v = \int \frac{d(\text{seny})}{\text{sen}\,\varphi} = \ln \text{sen}\,\varphi + \ln c$$

$$\ln v = \ln(c\,\text{sen}\,\varphi)$$

$$v = c\,\text{sen}\,\varphi \qquad (7)$$

II) Agora lagrange admite que na equação (7), a constante C é uma função de φ logo temos:

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{dc}{d\varphi}\,\text{sen}\,\varphi + c.\cos\varphi \qquad (8)$$

substituindo-se as equações (7) e (8) na equação (6) vem:

$$\frac{dc}{d\varphi}\,\text{sen}\,\varphi + c.\cos\varphi - (c\,\text{sen}\,\varphi).\text{cotg}\,\varphi = f(\varphi)$$

$$\frac{dc}{d\varphi}\,\text{sen}\,\varphi = f(\varphi)$$

separando as variáveis, temos:

$$dc = \frac{f(\varphi)\,d\varphi}{\text{sen}\,\varphi}$$

que integrando, temos:

$$c = \int \frac{f(\varphi)\,d\varphi}{\text{sen}\,\varphi} + K$$

obtém-se a solução geral de (6), substituindo-se a expressão acima na expressão (7) e teremos:

$$v = \text{sen}\,\varphi\left(\int \frac{f(\varphi)\,d\varphi}{\text{sen}\,\varphi} + K\right)$$

onde K é uma constante a se determinar, a partir das condições de contorno da casca para cada caso particular de carregamento. Conclui-se portanto, que o cálculo dos deslocamentos v e w de pontos da casca, é feito através das equações (5), (4b) e (2) respectivamente, conforme veremos.

b) APLICAÇÃO PRÁTICA

Seja por exemplo uma casca esférica de espessura constante h e raio a, sob ação somente de seu peso próprio g por unidade de superfície. (Fig. 03).

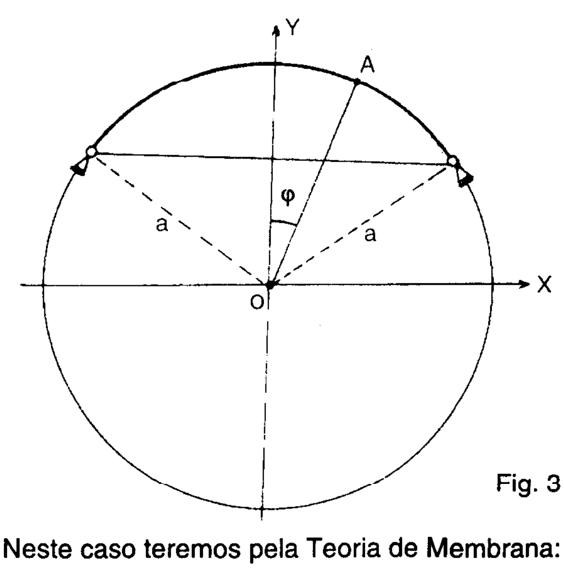

Fig. 3

Neste caso teremos pela Teoria de Membrana:

$R_y = R_x = a$

$$N_y = \frac{-a \cdot g}{1 + \cos\varphi}$$

$$N_x = a \cdot g\left(\frac{1}{1 + \cos\varphi} - \cos\varphi\right)$$

substituindo-se os valores acima na equação (5), tem-se após as devidas reduções:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v\cot g\varphi = \frac{a^2 g(1+N)}{Eh}\left(\cos\varphi - \frac{2}{1+\cos\varphi}\right)$$

cuja solução geral é:

$$v = \frac{a^2 \cdot g(1+\sqrt{\ })}{Eh}\left[\operatorname{sen}\varphi \cdot \ln(1+\cos\varphi) - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+\cos\varphi}\right] + K \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Para $\varphi = \alpha$ tem-se $v = 0$

substituindo-se esses valores, a expressão acima fornece K.

$$K = \frac{a^2 \cdot g(1+\sqrt{\ })}{Eh}\left[\frac{1}{1+\cos\alpha} - \ln(1+\cos\alpha)\right]$$

Para se obter o deslocamento radial W, pode-se utilizar as expressões (2) e (4b) simultâneamente e teremos finalmente:

$$v = \frac{a^2 \cdot g(1+\sqrt{\ })}{Eh}\left(\frac{1}{1+\cos\alpha} - \frac{1}{1+\cos\alpha} + \ln\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

$$w = v\cot g\varphi - \frac{a^2 \cdot g}{Eh}\left(\frac{1+\sqrt{\ }}{1+\cos\alpha} - \cos\varphi\right)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A. GUERRIN - **Tratado de Concreto Armado, 2ª ed.**, São Paulo, Hermes Ed. Ltda, 1983.
2. FLÜGGE, Wilhelm - **Stress In Shells**, 4ª ed., New York, Springuverlag New York Inc., 1967.
3. SALVADORI, Mário - **Strutural Desing In Architecture**, 2ª ed., United State of American, Prentice-Hall Inc., 1967.
4. TIMOSHENKO, S. - **Teorias de Placas & Lâminas**, 1ª ed., New York Mac GrawHill Inc., 1953.