

# GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

\* Francisco Chagas da Silva Filho. M. Sc.

## RESUMO

*Este trabalho apresenta um programa de computador que gera malhas de Elementos Finitos, automaticamente. São também apresentados exemplos de aplicação em obras geotécnicas, onde se pode verificar todas as potencialidades e limitações do programa.*

## ABSTRACT

*This work present a computer program that makes mesh of. Finite Elements automatically. They are also presentd in Geotechnical applications in works, where we can observe all potentialities and limitations of program.*

## 1. INTRODUÇÃO

Em problemas estruturais, um contínuo elástico recebe carregamentos que provocam deslocamentos e acréscimos de tensões. A solução das equações da Mecânica dos Sólidos, em que se baseia as estruturas em geral, tais como concreto, aço, solos etc., pode ser aproximada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), obtendo-se resultados bastante confiáveis, mesmo em situações de grande complexidade.

Na solução de problemas simples ou complexos o MEF discretiza o contínuo em elementos com um

número finito de graus de liberdade, interconectados por pontos chamados de nós. Para a obtenção deste número finito de elementos o contínuo discretizado deverá ter condições de contorno pré-definidas com geometria conhecida.

Em uma análise, por exemplo, de uma fundação superficial pode-se adotar a região dada na Figura 1, subdividida em elementos. A região tem impedimentos de deslocamentos dados pelos apoios e indicados também na figura.

---

\* Eng. Civil e Prof. Assistente da UNIFOR

## MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

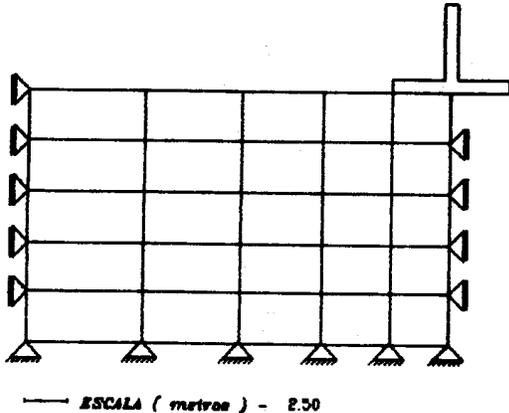


FIGURA 1 - Fundação Superficial

A solução consiste em se determinar os deslocamentos nodais compatíveis com os carregamentos aplicados ao corpo, como também compatíveis com as propriedades dos materiais. Obtidos os deslocamentos tem-se o corpo deformado submetido agora a um novo estado de tensões.

O número total de graus de liberdade dependerá do número de direções possíveis de deslocamentos (análise bi-dimensional ou tri-dimensional), bem como do número total de pontos nodais. E evidentemente que quanto maior o número de direções de deslocamentos e número de pontos nodais, mais complexo deve ficar a solução do problema.

A solução de problemas mais complexos, com um grande número de elementos, pode ser obtida facilmente com a utilização de recursos computacionais, sendo que todas as informações de carregamentos, propriedades dos materiais e a geometria do problema, devem ser fornecidos ao programa de Elementos Finitos.

Quem trabalha com análises estruturais pelo Método dos Elementos Finitos, sabe o quanto é enfadonho e passível de muitos erros a entrada de dados da malha de discretização do contínuo em estudo. Em geral tem-se um número muito grande de elementos. O número pode ser cada vez maior se o tipo de elemento utilizado for menos sofisticado, ou seja a função deslocamento for de menor grau ou até mesmo linear.

Também um grande número de elementos é mais exigido em trechos da malha, onde ocorre uma concentração de esforços, já que nestes locais deve haver um maior campo de deslocamentos. Em elementos com função deslocamento linear, este refinamento localizado deve ser ainda maior. É bom salientar que atual-

mente trabalha-se mais com elementos menos sofisticados, onde se tem um maior controle da análise. E como foi dito anteriormente provoca um crescimento no número de elementos.

Neste trabalho apresenta-se um programa de geração automática de malhas de elementos finitos onde se pode obter um número muito elevado de elementos com os refinamentos nos trechos necessários sem aumento de trabalho na entrada de dados desta malha. Foi idealizado para trabalhar com a análise de tensão-deformação de obras de solos, tais como: barragens, aterros em geral, fundações superficiais e profundas, etc. Após a apresentação do programa são feitos exemplos de aplicação do programa para estes tipos de obras, mostrando todas as suas potencialidades e limitações.

## 2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

O programa GERASOL foi desenvolvido na preparação dos Seminários de Qualificação ao Doutorado do autor, na COPPE/UFRJ. Está codificado pelo Microsoft FORTRAN versão 5.1. Foi feito um complemento ao programa GERASOL em "Autolisp", a linguagem do Autocad, para a impressão dos resultados que são mostrados neste trabalho.

O programa gera malhas de elementos finitos divididas vertical e horizontalmente em comprimentos iguais ou crescentes, sendo o refinamento maior a esquerda ou a direita, para cima ou para baixo. Ao programa são fornecidos dados da região em estudo, chamada de super-malha que pode ser formada por um ou mais super-elementos. Sendo que cada super-elemento deverá ser formado por quatro super-nós. Na Figura 2 pode-se ver duas super-malhas: uma com apenas um super-elemento e outra com quatro super-elementos.

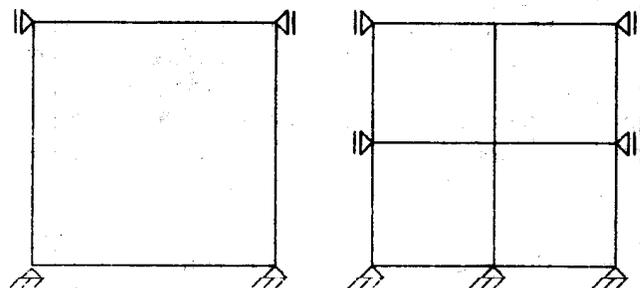
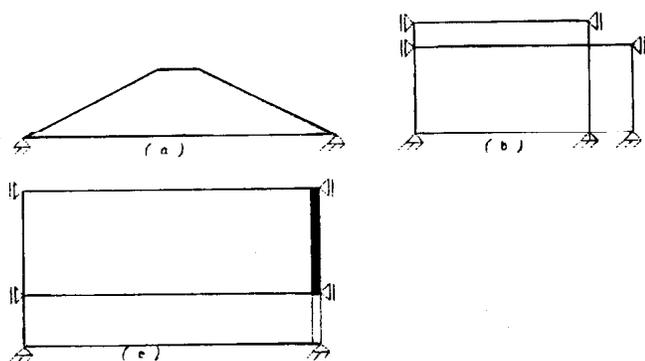


FIGURA 2 - Super Malhas. ( a ) Apenas um Super-elemento ( b ) Quatro Super-elementos

A super-malha deverá ser formada por linhas de super-elementos. A numeração das linhas é feita de baixo para cima e da esquerda para a direita. Cada linha terá um número total de super-elementos. Deverão ser fornecidos ao programa os seguintes dados: número de linhas de super-elementos, número de super-elementos em cada linha, coordenadas dos quatro super-nós de cada super-elemento, tipos de apoio para cada super-nó bem como carregamentos (se existirem) aplicados a cada um.

O refinamento localizado será indicado pela razão entre a subdivisão maior e a menor, sendo feita uma interpolação geométrica pelo programa para as demais subdivisões intermediárias. A super-malha a ser discretizada poderá ter forma trapezoidal, como é o caso dos aterros (ver Figura 3a). Para fundações superficiais deverá ser incompleta, simulando o assentamento da fundação abaixo do nível do terreno, como mostrado na Figura 3b. A utilização de super-malhas com apenas um super-elemento, só é possível no caso de solos homogêneos, ou seja, não havendo estratificações ou peças de concreto inseridas no sub-solo, como é o caso de fundações profundas com estacas. Na Figura 3c pode-se esclarecer melhor o que foi dito acima.



**FIGURA 3 - Tipos de Supermalhas**  
**(a) Barragem de Terra**  
**(b) Fundação Superficial - Sapata**  
**(c) Fundação Profunda - Estaca**

Os dados de entrada para o programa GERASOL poderão ser feitos via teclado ou por arquivo e deverão constar das seguintes informações, em cada linha do arquivo:

a) Número de linhas de super-elementos da super-malha;

b) número de super-elementos nesta linha;

c) número do primeiro super-elemento;

d) coordenadas "x" e "y" do super-nó inferior esquerdo e indicações de existência de restrições de deslocamentos nas direções:

0 - se não existe restrição de deslocamento na direção

1 - se existe restrição de deslocamento na direção "y"

2 - se existe restrição de deslocamento na direção "x"

obs.: Cada super-nó terá dois códigos, pois a análise admitida pelo programa é bidimensional.

e) repetir o item "d" para os demais super-nós do super-elemento;

f) número de subdivisões na direção "x" e a razão entre a subdivisão maior e a menor. Sendo este valor negativo a menor subdivisão deverá ser a esquerda e se for positivo à direita;

g) número de subdivisões na direção "y" e a razão entre a subdivisão maior e a menor. Sendo este valor negativo a menor subdivisão deverá ser para baixo e se for positivo para cima;

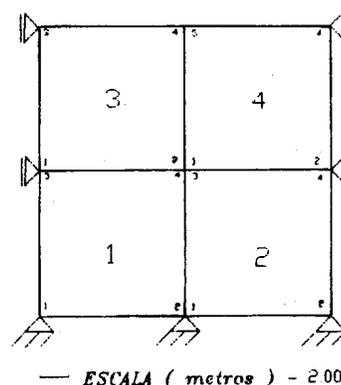
h) Número do super-elemento seguinte desta linha;

i) Repetição dos itens "d" a "f" para o super-elemento;

j) Número da linha seguinte de super-elementos e repetição dos itens seguintes até o último super-elemento da última linha.

**Exemplo:** Suponha a super-malha da Figura 4a, que terá o seguinte arquivo de dados (o formato de entrada de dados é livre). A seguir são apresentados também o arquivo de saída e malha gerada pelo programa na Figura 4b:

### SUPER-MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



**FIGURA 4a - Super Malha com 4 Super-elementos**

2  
2  
1  
.00 .00 1 2  
10.00 .00 1 2  
.00 10.00 0 2  
10.00 10.00 0 0  
2 1.00  
2 1.00  
2  
10.00 .00 1 2  
20.00 .00 1 2  
10.00 10.00 0 0  
20.00 10.00 0 2  
2 1.00  
3 2.00  
2  
3  
.00 10.00 0 2  
10.00 10.00 0 0  
.00 20.00 0 2  
10.00 20.00 0 0  
2 1.00  
2 1.00  
4  
10.00 10.00 0 0  
20.00 10.00 0 2  
10.00 20.00 0 0  
20.00 20.00 0 2  
2 1.00  
3. 2.00

O arquivo de saída apresenta as seguintes informações:

- a) Número de nós e número de elementos;
- b) número de cada nó com a respectiva coordenada;
- c) número de nós com restrições de deslocamentos na direção y, número de nós com restrições de deslocamentos na direção x e número de nós com restrições em ambas direções;
- d) número dos nós com restrições de deslocamentos na direção y;
- e) número dos nós com restrições de deslocamentos na direção x,

f) número dos nós com restrições de deslocamentos em ambas as direções;

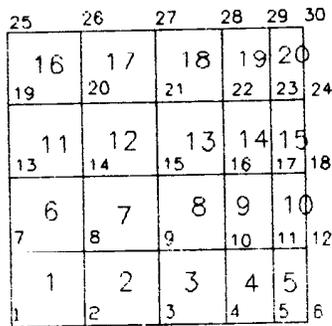
g) número dos elementos com os respectivos número dos quatro nós que compõem o elemento.

30	20		
1	0.0000	0.0000	
2	5.0000	0.0000	
3	10.0000	0.0000	
4	14.5308	0.0000	
5	17.7346	0.0000	
6	20.0000	0.0000	
7	0.0000	5.0000	
8	5.0000	5.0000	
9	10.0000	5.0000	
10	14.5308	5.0000	
11	17.7346	5.0000	
12	20.0000	5.0000	
13	0.0000	10.0000	
14	5.0000	10.0000	
15	10.0000	10.0000	
16	14.5308	10.0000	
17	17.7346	10.0000	
18	20.0000	10.0000	
19	0.0000	15.0000	
20	5.0000	15.0000	
21	10.0000	15.0000	
22	14.5308	15.0000	
23	17.7346	15.0000	
24	20.0000	15.0000	
25	0.0000	20.0000	
26	5.0000	20.0000	
27	10.0000	20.0000	
28	14.5308	20.0000	
29	17.7346	20.0000	
30	20.0000	20.0000	

0	8	6				
7	12	13	18	19	24	25 30
1	2	3	4	5	6	
1	1	2	8	7		
2	2	3	9	8		
3	3	4	10	9		
4	4	5	11	10		
5	5	6	12	11		
6	7	8	14	13		
7	8	9	15	14		
8	9	10	16	15		
9	10	11	17	16		
10	11	12	18	17		
11	13	14	20	19		
12	14	15	21	20		
13	15	16	22	21		
14	16	17	23	22		
15	17	18	24	23		

16	19	20	26	25
17	20	21	27	26
18	21	22	28	27
19	22	23	29	28
20	23	24	30	29

**MALHA DE ELEMENTOS FINITOS**



ESCALA ( metros ) = 2.00

**FIGURA 4b - Malha Gerada pelo Programa Gerasol**

**3. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

**3.1 BARRAGEM DE TERRA HOMOGÊNEA -**

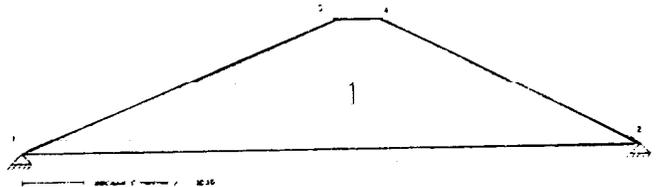
Uma barragem de 25.0m de altura máxima construída sobre um sub-solo competente e admitido incompressível. A inclinação dos taludes se apresenta 2.5:1 (H:V) para montante e 2: 1 (H:V) para jusante. A estabilidade dos taludes poderá ser verificada com aplicação de um programa de Elementos Finitos. O programa GERASOL poderá então ser utilizado para geração da malha. Deverá então ser fornecida a geometria da super-malha bem como os tipos de apoio admitidos para cada super-nó. Como resultado ter-se-á a malha final com a numeração de todos os elementos e nós, bem como todas as suas coordenadas. Obtém-se também os números dos nós com cada tipo de apoio que serão iguais aos adotados nos super-nós laterais ao mesmo. Logo abaixo é apresentado o arquivo de entrada de dados do programa GERASOL. Nas Figuras 5a e 5b são apresentadas a super-malha de entrada e a malha final gerada pelo programa.

Foi adotada na discretização da malha 9 subdivisões de igual tamanho na horizontal e 5 subdivisões na vertical, com a subdivisão maior, na base, 2 vezes maior do que a menor, no topo da barragem, podendo esta configuração ser modificada conforme o tipo de análise feita pelo usuário. Vale salientar que com o uso do programa é fácil verificar se está ocorrendo convergência de resultados com o refinamento da malha. A malha gerada possui 60 nós e 45 elementos, conforme visto na Figura 5b.

1  
1  
1

.00	.00	1	2
121.50	.00	1	2
62.50	25.00	0	0
71.50	25.00	0	0
9	1.00		
5	2.00		

**SUPER-MALHA DE ELEMENTOS FINITOS**



**FIGURA 5a - Barragem de Terra - Super Malha**

**3.2. FUNDAÇÃO SUPERFICIAL -** Uma sapata quadrada de 4.0m de largura assentada a 2.0m de profundidade de um sub-solo homogêneo com 10.0m de profundidade sobrejacente a um substrato rochoso admitido incompressível.

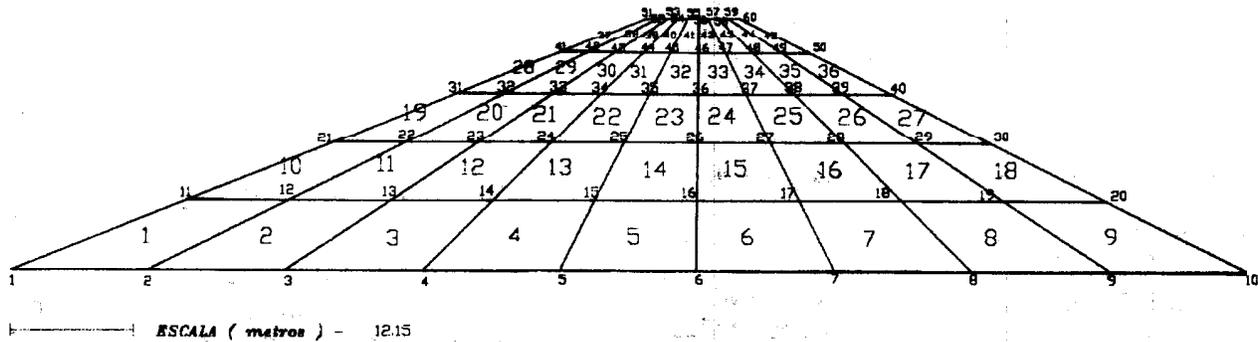
A super-malha deverá ser incompleta, pois a sapata está assentada a 2,0m de profundidade. Assim sendo a sua configuração deverá ter pelo menos 3 super-elementos em duas linhas, já que os mesmos devem ser quadriláteros (ver Figura 6a). O número de subdivisões na vertical, em super-elementos que ficam lado a lado, deve ser igual. Já na horizontal deve ter número de subdivisões iguais, super-elementos que ficam um acima do outro.

A preocupação para simulações, como esta, deve ser no maior refinamento da malha próximo ao carregamento. Assim, para os super-elementos 1 e 2 o número de subdivisões na vertical é igual a 6 com refinamento maior acima, ou seja, a menor subdivisão, próxima a sapata, deve ser 3 vezes menor do que a subdivisão na base dos super-elementos. Já para os super-elementos 1 e 3 foram adotadas 8 subdivisões na horizontal, com a subdivisão próxima ao carregamento 5 vezes menor do que a mais afastada da sapata. O arquivo de entrada da super-malha é apresentado logo abaixo. A malha gerada pelo programa GERASOL possui 95 nós e 76 elementos, conforme a Figura 6b.

2			
2			
	1	1	
.00	.00	1	2

14.00	.00	1	2
.00	8.00	0	2
14.00	8.00	0	0
8	5.00		
6	3.00		
2	1		
14.00	.00	1	2
16.00	.00	1	2
14.00	8.00	0	0
16.00	8.00	0	2

**MALHA DE ELEMENTOS FINITOS**



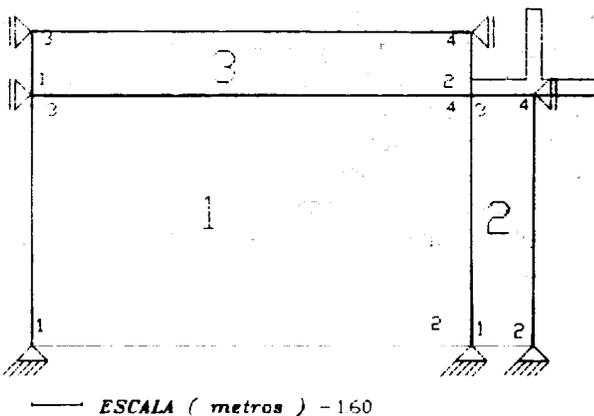
**FIGURA 5b - Barragem de Terra - Malha Gerada**

2	1.00		
6	3.00		
1			
3	1		
0.00	8.00	0	2
14.00	8.00	0	0
.00	10.00	0	2
14.00	10.00	0	2
8	5.00		
2	1.00		

**3.3 FUNDAÇÃO PROFUNDA COM ESTACAS -**

Admitindo-se a existência de um subsolo com quatro camadas de 5.0m cada e uma estaca cilíndrica de 0.30m de diâmetro e 15.0m de profundidade. Abaixo dos 20.0m de solo existe o substrato rochoso admitido incompressível. O refinamento, também neste caso, deverá se concentrar mais, próximo ao topo da estaca e na sua ponta. Pela existência de 4 camadas e a peça de concreto inserida no subsolo, a configuração da super-malha deverá ser de pelo menos 8 super-elementos distribuídos em 4 linhas, conforme indicado na Figura 7a. O arquivo de entrada pode ser visto logo abaixo. A malha gerada pelo programa GERASOL possui 144 nós e 121 elementos e pode ser vista na Figura 7b.

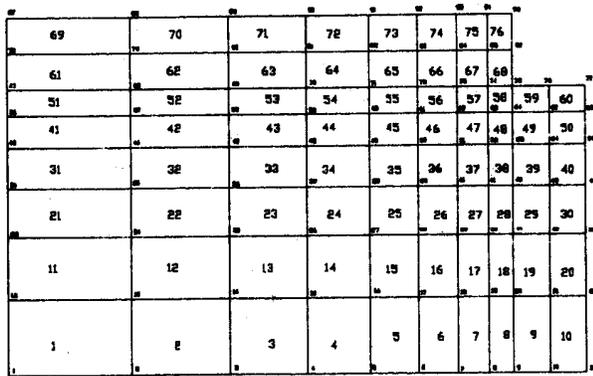
**SUPER-MALHA DE ELEMENTOS FINITOS**



**FIGURA 6a - Fundação Superficial - Super-Malha**

4			
2			
1			
.00	.00	1	2
23.70	.00	1	2

### MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



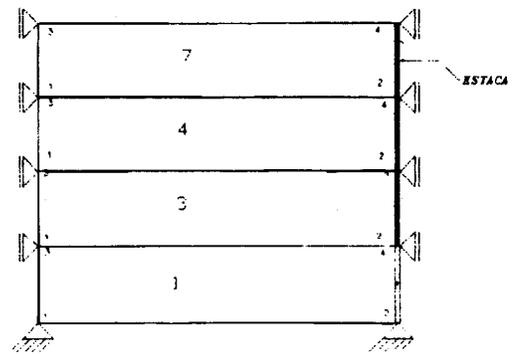
ESCALA ( metros ) - 1.60

FIGURA 6b - Fundação Superficial - Malha Gerada

.00	5.00	0	2
23.70	5.00	0	0
10	10.00		
3	2.00		
2			
23.70	.00	1	2
24.00	.00	1	2
23.70	5.00	0	0
24.00	5.00	0	2
1	10.00		
3	2.00		
2			
3			
.00	5.00	0	2
23.70	5.00	0	0
.00	10.00	0	2
23.70	10.00	0	0
10	10.00		
3	-2.00		
4			
23.70	5.00	0	0
24.00	5.00	0	2
23.70	10.00	0	0
24.00	10.00	0	2
1	10.00		
3	-2.00		
2			
5			
.00	10.00	0	2
23.70	10.00	0	0
.00	15.00	0	2

23.70	15.00	0	0
10	10.00		
2	1.00		
6			
23.70	10.00	0	0
24.00	10.00	0	2
23.70	15.00	0	0
24.00	15.00	0	2
1	10.00		
2	1.00		
2			
7			
.00	15.00	0	2
23.70	15.00	0	0
.00	20.00	0	2
23.70	20.00	0	0
10	10.00		
3	2.00		
8			
23.70	15.00	0	0
24.00	15.00	0	2
23.70	20.00	0	0
24.00	20.00	0	2
1	10.00		
3	2.00		

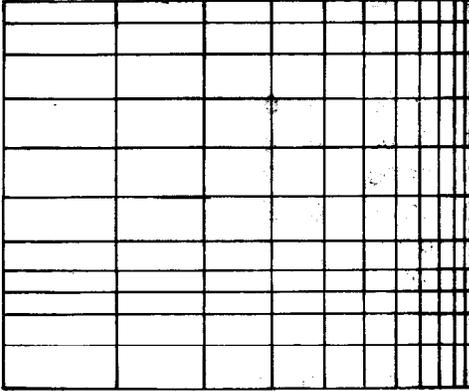
### SUPER-MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



ESCALA ( metros ) - 2.40

FIGURA 7a - Fundação Profunda - Super Malha

## MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



— ESCALA ( metros ) — 2 40

**FIGURA 7b - Fundação Profunda - Malha Gerada**

### 4. CONCLUSÃO

O programa GERASOL poderá ser utilizado como pré-processador em qualquer programa de Elementos

Finitos com análise de tensão-deformação em obras geotécnicas. A preocupação foi de solucionar um problema comum aos usuários do MEF, pois a entrada de dados da malha é bastante enfadonha e passível de muitos erros, pois esta em geral se apresenta com um número muito grande de elementos

Um número grande de elementos é exigido principalmente quando estes são mais simples. A convergência de resultados, também pode ser estudada facilmente com a utilização do programa, pois a mudança da malha, aumentando o refinamento total ou localizado é feita automaticamente.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CRITICAL STATE SOIL MECHANICS VIA FINITE ELEMENTS - A. M. Britto and M. J. Gunn. John Wiley & Sons, 1987.