CASCAS FUNICULARES

RESUMO

O presente artigo mostra o roteiro para se obter a equação cartesiana da superfície média de uma casca, impondo-se nela um estado duplo de tensões de compressão constante em todos os pontos da casca de modo a gerar somente esforços de compressão na casca.

ABSTRACT

This article shows the schedule to obtain the equation cartesiana of the middle surface of the shell, to impose on an state double of the tension of the constante compression an all the point of the shell, insuch a manner to produce only effort of the compression an shell.

Benedito Torquato de Oliveira

Engenheiro Civil, Professor do Departamento de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da UNIFOR.

1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Dado um carregamento e conhecida a equação cartesiana da superfície média de uma casca, podemos encontrar o estado de tensões de membrana em todos os pontos da superfície média da casca. Nas cascas funiculares adota-se um procedimento inverso, ou seja, dado um certo carregamento impõe-se um estado de tensões de membrana conhecido, geralmente compressão, constante em toda casca e, a partir daí, determina-se a equação $z = f(x,y)$ da supefície média da casca.

2. A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS CASCAS FUNICULARES.

Do estudo que fizemos acerca da função de tensão de A em artigo anterior, chegamos à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \gamma^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi \partial \gamma} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \chi \partial \gamma} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \chi^2} =$$

$$= - z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \chi^2} \cdot \int_{\chi^\circ}^{\chi} X d\chi$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \int_{y_\circ}^{y} Y \cdot dy \cdots\cdots (1)$$

Tendo-.se em vista a equação acima, faremos as seguintes considerações para as cascas de pequena convexidade:

a) Podemos fazer as seguintes aproximações:

$$\bar{N}\chi \cong N\chi = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

$$\bar{N}y \cong Ny = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$z \cong q$

onde q é a carga atuante por unidade de superfície da casca.

b) Vamos impor um estado de tensões de modo que em todos os pontos da casca se tenha:

Nx = Ny = - N (compressão)
Nxy = 0

c) As componentes do carregamento por unidade de superfície no plano XY são:

X= Y = 0

Nessas condições a equação (1) toma a forma:

$$(-N)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (-N)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -q$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{q}{N} \cdots\cdots (2)$$

A expressão acima é denominada de equação de Poisson e foi utilizada por Prandt no estudo da torsão. Esta equação permite a determinação da altura de um ponto qualquer de uma casca funicular em relação à base de sustentação da casca.

3. APLICAÇÕES PRÁTICAS.

a) Determinar a função z = f (x,y) para uma casca funicular submetida à ação do seu peso próprio com a qual se deseja cobrir uma área plana circular de raio a, conforme Fig. 1.

Temos:

$z \cong g$:

$De(2), vem$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{g}{N}$$

$$Seja,\ z = \frac{g}{4N}x^2 + \frac{g}{4N}y^2 + Axy + Bx + cy + D \ldots (a)$$

a solução da equação diferencial, acima teremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{g}{2c}\cdot x + Ay + B \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{g}{2c} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g}{2c}y + Ax + c \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{g}{2c} \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

vejamos as condições de contorno:

para x = ± a e y = 0 *tem-se*:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

substituindo-se os valores acima em (d), *vem*;

$$\frac{g}{2c}\cdot 0 + A\cdot a + c = 0$$

$$\therefore A\cdot a + c = 0$$

$$\frac{g}{2c}0 + A\cdot(-a) + c = 0$$

$$\therefore -A\cdot a + c = 0$$

$$A\cdot a + c = -A\cdot a + c$$

$$\therefore 2Aa = 0$$

$\therefore$ A = 0, logo C = 0

para y = ± a e x = 0, tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

substituindo-se os valores acima em (b), vem:

$$0 = \frac{g}{2c} \cdot 0 + A \cdot a + B$$

$$A \cdot a + B = 0$$

como A = 0, então B = 0

Para z = 0 tem-se $x^2 + y^2 = a^2$

De (a), vem:

$$0 = \frac{g}{4c}(x^2 + y^2) + D$$

$$\therefore\ 0 = \frac{g.a^2}{4c} + D$$

$$\therefore\ D = -\frac{g \cdot a^2}{4N}$$

A equação (a) assume a forma:

$$z = \frac{g}{4N}(x^2 + y^2) - \frac{ga^2}{4N}$$

$$\therefore\ z = \frac{g}{4N}(x^2 + y^2 - a^2)$$

b) Idem problema anterior, se deseja cobrir uma área plana elíptica com semi-eixo maior a, e semi-eixo menor b, conforme Fig.2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{2y^2} = \frac{g}{N}$$

seja a dedução da equação diferencial, acima:

$$z = \frac{g}{2N}Ax^2 + \frac{g}{2N}By^2 + cxy + Dx + Ey + F \ldots\ldots(a)$$

Teremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{g.A}{N}x + cy + D$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{g.A}{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{gB}{N}y + cx + E$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{gB}{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

substituindo-se os valores acima na equação diferencial, tem-se:

$$\frac{g.A}{N} + \frac{gB}{N} = \frac{g}{N}$$

$$A + B = 1$$

Tendo-se em vista as condições de contorno, teremos,

para x = ± a e y = 0

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

De (c), vem:

$$0 = \frac{g.B}{2N} \cdot 0 + c.a + E$$
$$c.a + E = 0$$
$$0 = \frac{g.B}{2N} \cdot 0 + c.a + E$$
$$-c.a + E = 0$$
$$c.a + E = -c.a + F$$
$$2c.a = 0$$

como: $a \neq 0$ logo,

C = 0
E = 0

De (b), vem:

Para Y = ± b e X = 0

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$0 = \frac{g.A}{2N} \cdot 0 + c.a + D$$

$$c.a + D = 0$$

$$0 = \frac{g.A}{2N} \cdot 0 - c.a + 0$$

$$\therefore -c.a + D = 0$$

$$ca + D = -ca + D$$

$$2ca = 0$$

logo C= 0
D=0

A equação (a), fica:

$$z = \frac{g}{4N}(Ax^2 + By^2) + F \text{........................} (d)$$

para z = 0, tem-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore b^2a^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

como A + B = 1, fazendo-se

$$A = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \qquad B = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

a equação (d), fica:

$$z = \frac{g}{2N(a^2 + b^2)} \cdot (b^2x^2 + a^2.y^2) - F$$

Tem-se portanto para Z = 0

$$0 = \frac{g}{2N(a^2 + b^2)}(a^2 + b^2) - F$$

$$\therefore F = \frac{ga^2\, b^2}{2N\,(a^2 + b^2)}$$

Teremos finalmente:

$$Z = \frac{g}{2N\,(a^2 + b^2)}(b^2.x^2 + a^2.y^2 - a^2.b^2)$$

$$z = \frac{ga^2\, b^2}{2N(a^2 + b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Note-se que numa casca funicular, as tensões são tensões de *membrana* (*normalmente compressão*) e pressupõe-se que o anel *horizontal de apoio da casca, seja suficientemente* rígido e contínuo para que se possa desprezar os esforços de flexão da casca.

Figura 1

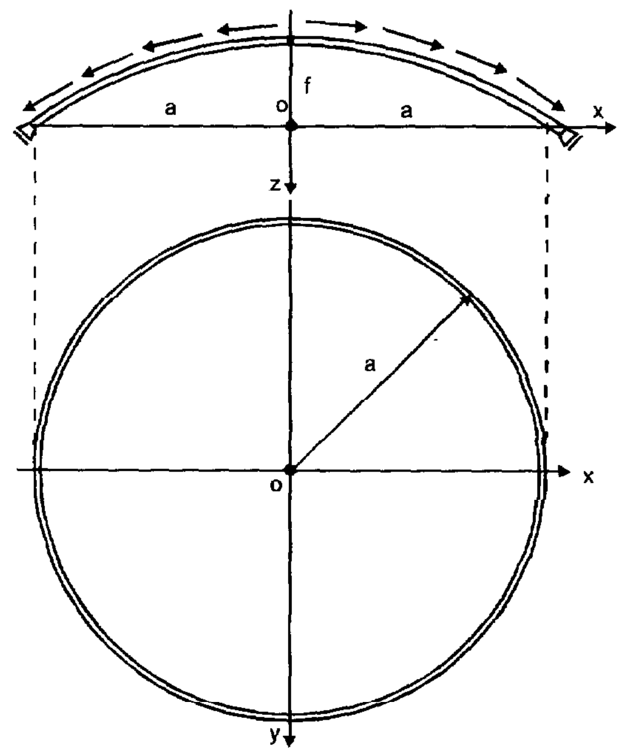
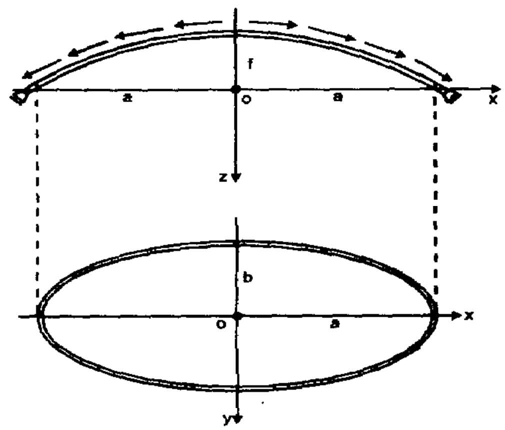


Figura 2



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A. GUERRIN - **Tratado de concreto armado.** 2ª ed. São Paulo, Hermes Editora Limitada, 1983.

2. FLUGGE, Wilhelm - **Stress in shells,** 4 ed., New York, Springuverinag New York Inc., 1967 3. SALVADORI, Mário - **Strutural Desing in architecture,** 2 ed. United State of American, Prentice - Hall Inc. , 1967.

4. S. TIMOSHENKO - **Teoria de placas y laminas**