

CÁLCULO DAS CASCAS CILÍNDRICAS LONGAS PELA TEORIA DE VIGAS

RESUMO

O objetivo deste artigo é apresentar uma sistemática simples para o cálculo das cascas cilíndricas longas, utilizando-se a teoria de vigas. Neste artigo, utilizaremos somente as cascas cilíndricas longas de diretrizes circulares por serem as mais corriqueiramente utilizadas.

ABSTRACT

The main goal of His article is to present a simple system for calculating the cylindrical long covers, using the theory. In this study we will only use cylindrical long covers of circular straightness for being the most common using.

**Benedito Torquato de
Oliveira**

*Engº Civil - Licenciado em
Matemática Profº
Departamento de
Engenharia Civil do Centro
de Tecnologia da UNIFOR.
Engenheiro do
Departamento Nacional de
Estradas de Rodagem -
DNER.*

1. GENERALIDADES.

Considere-se uma casca cilíndrica longa, cujas diretrizes extremas estão apoiadas em tímpanos ou em arcos, FIG 01.

A Teoria de viga para o cálculo das cascas cilíndricas longas, consiste em considerar a casca como se fosse uma viga, cuja a seção transversal contém a

diretriz da casca, aplicando-se em seguida, as leis clássicas de resistência dos materiais para se calcular as tensões normais e de cisalhamento geradas. Trata-se de uma teoria aproximada, que resolve os casos onde se pode considerar a seção transversal como indeformável, o que ocorre notadamente nas cascas longas ($l \geq 4a$) e de espessura e (Fig. 01)

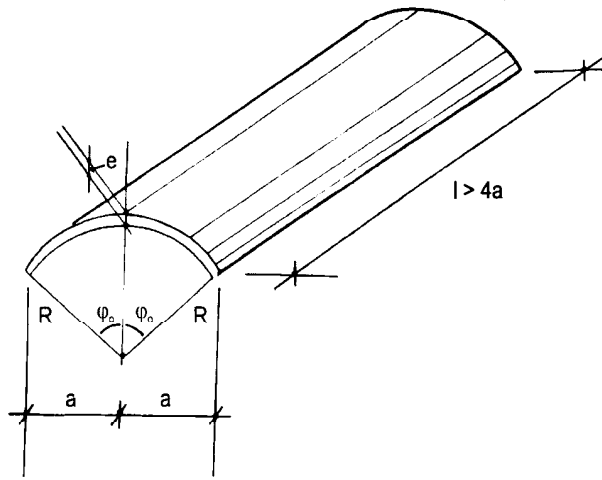


Figura 1

2. O CÁLCULO DAS TENSÕES.

Na flexão simples das vigas, as fórmulas deduzidas em resistência dos materiais, são as que se seguem:

a) Tensão normal nas fibras longitudinais (Fig.02)

$$\sigma_x = \frac{M}{J} Y$$

Onde:

M é o momento fletor na seção transversal.

Y é a distância de uma fibra à linha neutra da seção transversal, a qual passa neste caso pelo centro de gravidade da mesma.

Neste caso $Y = R \cdot \cos \varphi - Y_G$

onde: $Y_G = \frac{R \operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0}$

J é o momento de inércia da seção transversal em relação a linha neutra neste caso, tem-se:

$$J = R^3 e \left[\frac{1}{2} (2\varphi_0 + \operatorname{sen} 2\varphi_0) - 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right]$$

b) Tensão de cisalhamento nas fibras transversais e longitudinais. (FIG. 02)

$$t = \frac{M_s Q}{bj}$$

Onde,

Ms é o momento estático da área da parte da seção transversal situada acima de y, neste caso, tem-se:

Q é o esforço cortante na seção transversal.

b é a largura da seção transversal a uma distancia y da linha neutra. (FIG. 02)

3. CÁLCULO DOS ESFORÇOS NORMAIS E DE CISALHAMENTO.

$$(N_x, N_y = N_\varphi \text{ e } N_{xy} = N_{yx} = N_{x\varphi} = N_{\varphi x})$$

a) Cálculo de N_x (esforço normal por unidade de comprimento na direção longitudinal da casca).

Tem-se:

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y = \frac{N_x}{1.e}$$

Onde,

$$J = R^3 e \left(\varphi_0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi_0 - 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right)$$

$$N_x = \frac{Me}{J} y \quad \dots\dots(I)$$

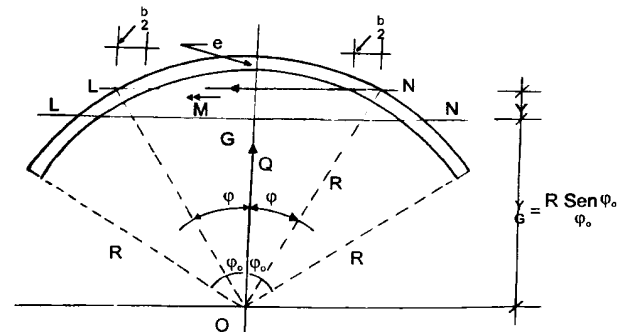


Figura 2

b) Cálculo de $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ (esforço tangencial por unidade de comprimento nas direções transversal e longitudinal).

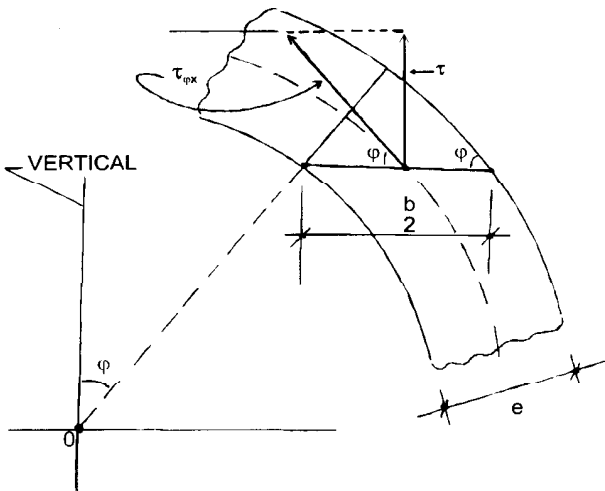


Figura 3

Na fig. 03, tem-se:

$$\tau = \frac{M_s \cdot Q}{bJ}$$

mas, $\tau = \tau_{yx} \cos(90 - \varphi) = \tau_{\varphi x} \text{ sen } \varphi$

$$\tau_{\varphi x} = \frac{\tau}{\text{sen } \varphi} = \frac{N_{\varphi x}}{1 \cdot e}$$

$$N_{\varphi x} = \frac{\tau_e}{\text{sen } \varphi} = \frac{M_s \cdot Q \cdot e}{bJ \cdot \text{sen } \varphi}$$

Na fig. 03, tem-se:

$$e = \frac{b}{2} \cdot \text{sen } \varphi$$

que substituindo-se na expressão acima, vem:

$$N_{\varphi x} = \frac{M_s \cdot Q}{2 \cdot J} \dots\dots\dots (II)$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

O esforço normal por unidade de comprimento $N_y = N_\varphi$ na direção da tangente à diretriz da casca é definida pelo ângulo φ e pode ser determinado utilizando-se a clássica equação da teoria de membranas para cascas de revolução, supondo-se um giro da diretriz em torno de um eixo vertical situado no infinito. (translação)

Tem-se:

$$\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} = -z$$

Nesta equação, tem-se:

$$N_y = N_\varphi$$

$$R_y = R$$

$$R_x = \infty$$

$$\text{logo } N_\varphi = -ZR \dots\dots\dots (III)$$

Observa-se na equação (III), que para $N_\varphi = 0$ (bordos longitudinais livres), exige-se que a componente Z do carregamento seja nula, FIG. 04 caso contrário, ou seja $Z \neq 0$, faz-se necessário a adoção de vigas longarinas nos bordos longitudinais da casca, para que essas vigas possam fornecer nos bordos longitudinais o respectivo esforço N_φ . (FIG 05).

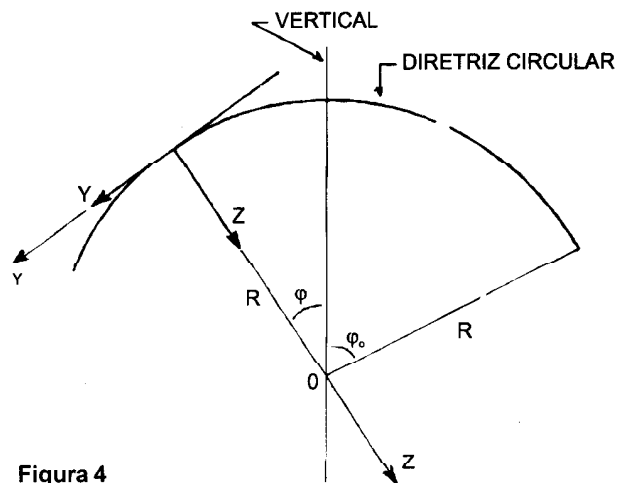


Figura 4

No caso do peso próprio w por unidade de área da casca, vem: (FIG 04):

$$Z = W \cos \varphi$$

Pela expressão (III), vem:

$$N_\varphi = -w \cos \varphi R$$

Para que $N_\varphi = 0$ exige-se que $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou seja, a tangente à diretriz deve ser vertical.

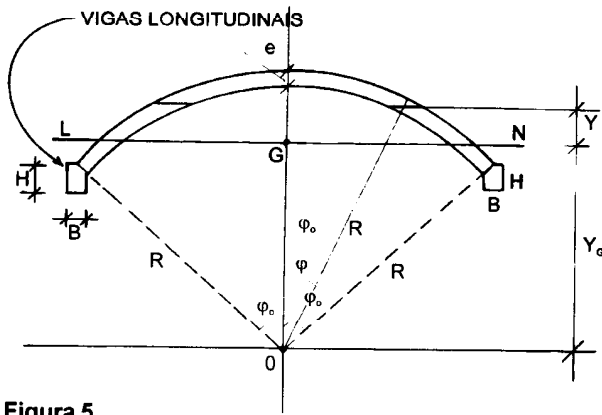


Figura 5

Quando se fizer necessário a adoção de vigas longarinas, deve-se adotar. (FIG. 05):

$$a) y_G = \frac{R^2 \operatorname{sen} \varphi_0 e + BHR \cos \varphi_0}{BH + R\varphi_0 e}$$

$$y = R \cos \varphi - y_G$$

$$b) J = R^3 e \left(\varphi_0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi_0 - \frac{2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\varphi_0} \right)$$

$$+ R^2 BH \cos^2 \varphi_0$$

5. APLICAÇÃO PRÁTICA.

Considere-se uma casca cilíndrica reta com diretriz semi-circular de raio $R_y = R$, de comprimento $l > 4R$ e submetida a ação de seu peso próprio q por unidade de comprimento da casca na direção longitudinal. A casca se encontra apoiada nas diretrizes extremas em tímpanos. FIG. 6 Vamos calcular as principais tensões e esforços correspondentes.

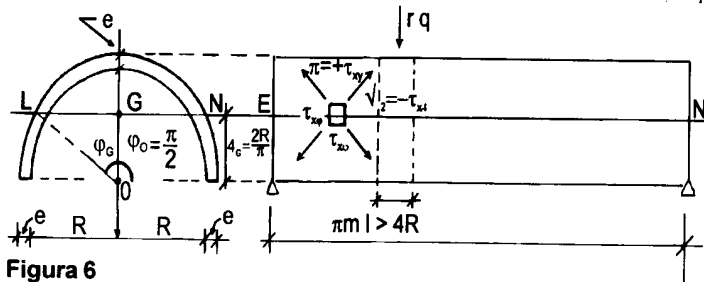


Figura 6

a) Peso total q por unidade de comprimento da casca $q = \pi R.W$. Onde w é o peso por unidade da área da casca.

b) Momento Máximo.

$$M_{\max} = \frac{q \ell^2}{8} = \frac{\pi R.W.\ell^2}{8} \cong 0,393 WR \ell^2$$

c) Momento de inércia da seção transversal em relação a L.N., (FIG. 06) neste caso tem-se:

$$y_G = \frac{R \operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0}, y = R \cos \varphi - \varphi_G$$

$$J = R^3 e \left[\frac{1}{2} (2\varphi_0 + \operatorname{sen} 2\varphi_0) - 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right]$$

para, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, vem:

$$y_G = \frac{2R}{\pi}$$

$$J = \frac{R^3 e}{\pi}$$

d) Cálculo de $N_{x(\max)}$

Pela expressão (I), vem:

$$N_{x(\max)} = \frac{Me}{J} \left(R - \frac{2R}{\pi} \right) = \frac{M Re}{\pi J} (\pi - 2)$$

$$\text{mas, } M = \frac{\pi R w \ell^2}{8}$$

Logo:

$$N_{x(\max)} = \left(\frac{\pi R \ell^2}{8} \right) \times \frac{Re}{\pi J} (\pi - 2) = \frac{R^2 w \ell^2 e}{8J} (\pi - 2) = \frac{R^2 w \ell^2 e}{8J} \times \frac{\pi}{R^3 e} (\pi - 2)$$

$$N_{x(\max)} = \pi(\pi - 2) \frac{w \ell^2}{R} \cong 0,45 \frac{w \ell^2}{R}$$

e) Cálculo de $N_{x(\min)}$.

$$N_{x(\min)} = \frac{-Me}{J} \left(\frac{2R}{\pi} \right) = -\frac{2M Re}{\pi J}$$

$$N_{x(\min)} = \frac{2 \times \left(\frac{\pi R w \ell^2}{8} \right) \times R e}{\pi \times \left(\frac{R^3 e}{\pi} \right)} = -0,80 w \frac{\ell^2}{R}$$

f) Cálculo de $N\varphi$ (max)

$$N = -wR \cos \varphi$$

$$\text{Para } \varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ tem-se : } N\varphi = 0$$

$$\text{para } \varphi = 0, \text{ tem-se : } N\varphi(\text{max}) = -WR$$

g) Cálculo de $N\varphi X$ (MAX)

neste caso tem-se:

$$\varphi_G = \frac{2R}{\pi} = 0,64 R$$

$$\cos \varphi_G = \frac{0,64 R}{R} = 0,64 \text{ (FIG 06)}$$

$$\varphi_G = \text{ARC } \cos (0,64) = 0,88 \text{ rad.}$$

$$M = 2 R^2 e \left(\frac{\text{sen } \varphi}{\varphi} - \frac{\text{sen } \varphi_0}{\varphi_0} \right)$$

Logo

$$M_{s(\text{max})} = 2 R^2 e \left(\frac{\text{sen } (0,88)}{0,88} - \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right) \cong 0,48 R^2 e$$

de (1), vem :

$$N_{\varphi x(\text{max})} = \frac{M_{s(\text{max})} Q_{(\text{max})}}{2 J}$$

$$Q_{\text{max}} = q \frac{\ell}{2} = \frac{\pi R w \ell}{2} = 1,57 R w \ell$$

$$N_{\varphi x(\text{max})} = \frac{(0,48 R^2 e)(1,57 R w \ell)}{2} = 0,38 R^2 w \ell e$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. A. GUERRIN - TRATADO DE CONCRETO ARMADO, 2ª ed., São Paulo, Hermes Editora Limitada, 1983.
2. FLUGGE, Wilhelm - STRESS. IN SHELLS, 4ª ed., New York, Springuerinag New York Inc., 1967
3. SALVADORI, Mario - STRUTURAL DESING IN ARCHITECTURE, 2ª ed., United State of American, Prentice - Hall Inc., 1967.
4. S. TIMOSHENKO - TEORIA DE PLACAS y LAMINAS.