

## RESPOSTA A CARGA TRANSIENTE DE UM SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE: ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

### RESUMO

*Neste trabalho apresenta-se a formulação para a análise dinâmica no domínio da frequência para sistemas unidimensionais submetidos a carga transiente. A conversão do domínio do tempo para o domínio da frequência e o inverso são efetuados com o uso do algoritmo de Fast Fourier Transform (FFT). É apresentado exemplo numérico, com amortecimento viscoso e histerético. O resultado é devidamente comentado.*

**Webe J. Mansur**

---

COPPE/Universidade  
Federal do Rio de Janeiro  
Programa de Engenharia  
Civil

**Walnório G. Ferreira**

---

Centro Tecnológico/  
Universidade Federal do  
Espírito Santo  
Departamento de Estruturas  
e Edificações

**Marsílio A. S. Leitão**

---

Centro de Tecnologia/  
Universidade Federal de  
Pernambuco  
Departamento de Engenharia  
Civil

### ABSTRACT

*This work presents discussion concerning a frequency domain formulation to study one dimensional dynamic systems subjected to transient loads. The standard Fast Fourier Transform (FFT) algorithm is employed to perform numerical Fourier transform and to compute its inverse. A numerical example is presented where viscous and hysteretic damping is considered. Results are discussed.*

### 1. INTRODUÇÃO

A resposta de uma estrutura submetida a cargas dinâmicas pode ser calculada basicamente por duas maneiras: resolvendo-se a equação de movimento no domínio da frequência ou no domínio do tempo. Quando o sistema possui parâmetros dependentes da frequência ou amorte-

cimento histerético, o procedimento no domínio da frequência é o mais indicado. Como exemplo, pode ser citado o caso dos sistemas de interação solo-estrutura nos quais as forças de rigidez e de amortecimento são dependentes da frequência.

Neste trabalho é apresentada a análise dinâmica no domínio da frequência de sistemas com

um grau de liberdade submetidos a cargas arbitrárias. São incluídas na análise sistemas com amortecimento histerético.

## 2. FUNÇÃO COMPLEXA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Para um sistema massa-mola de um grau de liberdade, com amortecimento viscoso, submetido a uma carga harmônica na forma exponencial, a equação complexa de movimento é dada por

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p_0 e^{i\bar{\omega}t} \quad (1)$$

sendo  $m$  a massa,  $c$  o coeficiente de amortecimento viscoso,  $k$  a rigidez e  $p_0$  a amplitude complexa da carga.

A resposta permanente, também complexa, pode ser assumida ter a forma

$$v = V e^{i\bar{\omega}t} \quad (2)$$

Onde  $V$  é a amplitude complexa. Deve ser compreendido que o movimento real será dado ou pela parte real de  $v$  ou pela parte imaginária, dependendo se a excitação é em cosseno ou em seno, respectivamente.

Pela substituição de (2) em (1) encontra-se diretamente

$$V = \frac{P_0}{(k - m\bar{\omega}^2) + ic\bar{\omega}} \quad (3)$$

Ou

$$V(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) p_0 \quad (4)$$

Onde

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{(k - m\bar{\omega}^2) + ic\bar{\omega}} \quad (5)$$

é a função complexa de resposta em frequência. Ela também pode ser apresentada sob a forma:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2) + i2\xi\beta} = \frac{1}{k} \frac{(1 - \beta^2) - i(2\xi\beta)}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (6)$$

Onde  $\beta = \bar{\omega}/\omega$  e  $\xi = c/c_c$  (com  $c_c = 2m\omega$ ).

A amplitude do movimento será dada por:

$$\rho = \frac{p_0}{k} D \quad (7)$$

onde  $D$  é o fator de amplificação dinâmica da resposta permanente dado por

$$D = \left[ (1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-1/2} \quad (8)$$

O ângulo de fase pode ser obtido diretamente da Eq. (6) na forma abaixo:

$$\theta = \arctan \left[ \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right] \quad (9)$$

## 3. RESPOSTA A EXCITAÇÃO PERIÓDICA

A representação de um carregamento periódico (Fig. 1) em série complexa de Fourier é dada por

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\bar{\omega}_1 t} \quad (10)$$

sendo  $\bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p}$ , onde  $T_p$  é o período do carregamento e  $\bar{\omega}_1$  é sua frequência fundamental

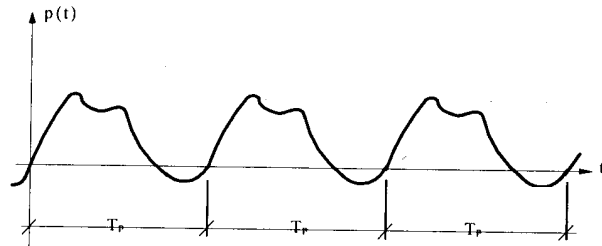


Figura 1 Carregamento periódico arbitrário.

Na Eq. (10),  $P_n$  é a amplitude complexa da componente harmônica de  $p(t)$  com frequência  $\bar{\omega} = n\bar{\omega}_1$ , sendo dada por

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-in\bar{\omega}_1 t} dt \quad (11)$$

A resposta do sistema com carregamento periódico expresso pelo Eq. (10) é a soma das respostas decorrentes de cada uma das componentes harmônicas da série complexa de Fourier. Considerando as Eqs. (2) e (4) para cada

componente harmônica da Eq.(10), obtém-se aquela resposta como

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}_n) P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (12)$$

onde  $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}$ , e

$$H(\bar{\omega}_n) = \frac{1}{(k - m\bar{\omega}_n^2) + ic\bar{\omega}_n} \quad (13)$$

é a função complexa de resposta em frequência para a frequência  $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}$ .

#### 4. RESPOSTA A CARGA NÃO PERIÓDICA ARBITRÁRIA. TRANSFORMA DE FOURIER

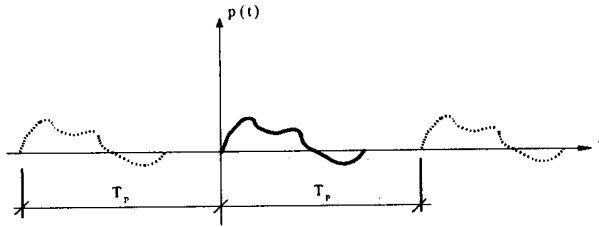


Fig. 2. Carregamento transiente arbitrário

Seja a carga não periódica arbitrária mostrada na Fig. 2 pela linha cheia e estendida infinitamente nos dois sentidos, como indicado pela linha tracejada. Carregamento assim definido é periódico arbitrário com período  $T_p$ . Considerando-se agora as expressões

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \quad (14a)$$

e

$$P(\bar{\omega}_n) = P_n T_p \quad (14b)$$

A Eq.(10) pode então ser reescrita

$$p(t) = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega}_n) e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (15)$$

onde

$$P(\bar{\omega}) = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} p(t) e^{-i\bar{\omega} t} dt \quad (16)$$

Notar que os limites não são mais 0 e  $T_p$ , e sim, -  $T_p/2$  e  $T_p/2$ . Isto não altera a integral visto que os novos limites continuam abrangendo apenas um período completo.

É aparente, contudo, que o carregamento repetitivo indesejável representado pelas linhas tracejadas pode ser eliminado estendendo-se o período para infinito ( $T_p \rightarrow \infty$ ). Isto acarreta  $\bar{\omega}$  tender para zero ( $\bar{\omega} \rightarrow 0$ ), as variáveis discretas  $\bar{\omega}_n$  tornam-se contínuas ( $\bar{\omega}$ ) e  $\Delta\bar{\omega}$  torna-se o diferencial  $d\bar{\omega}$ .

Em face dessas considerações, as expressões de Fourier, Eqs.(15) e (16), transformam-se respectivamente no seguinte par de Transformadas de Fourier =  $\mathfrak{F}^{-1}[P(\bar{\omega})]$

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega} = \mathfrak{F}^{-1}[P(\bar{\omega})] \quad (17)$$

$$P(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega} t} dt = \mathfrak{F}[p(t)] \quad (18)$$

$P(\bar{\omega})$  é a Transformada de Fourier (FT, Fourier Transform) de  $p(t)$  e  $p(t)$  é a Transformada Inversa de Fourier (IFT, Inverse Fourier Transform) de  $P(\bar{\omega})$ ,  $\mathfrak{F}$  indicando FT e  $\mathfrak{F}^{-1}$ , IFT. A Eq.(17) indica que a IFT restitue à função inicial.

Assim a resposta no domínio do tempo será dada por:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\bar{\omega}) e^{i2\pi\bar{\omega} t} d\bar{\omega} \quad (19)$$

onde

$$V(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) P(\bar{\omega}) \quad (20)$$

que é a resposta no domínio da frequência, dada pelo produto da função complexa de resposta em frequência pela FT do carregamento arbitrário.

#### 5. CONSIDERAÇÃO DO AMORTECIMENTO HISTERÉTICO

Em muitos sistemas estruturais um modelo de amortecimento histerético é mais adequado do que um de amortecimento viscoso. Isto é evidenciado por ensaios experimen-

tais que mostram que a perda de energia por ciclo independe da frequência de excitação. O modelo de amortecimento histerético corrobora este resultado, ao contrário do modelo de amortecimento viscoso. O amortecimento histerético pode ser definido como aquele no qual a força de amortecimento é proporcional ao deslocamento, mas em fase com a velocidade. No caso de movimento harmônico, a força de amortecimento é, então:

$$f_a = i\zeta kv \quad (21)$$

Onde  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento histerético. A presença do número imaginário  $i$  traduz o fato de que aquela força está em fase com a velocidade.

Tendo em conta a Eq.(21), a função complexa de resposta em frequência no caso de amortecimento histerético é definida pela equação:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(1-\beta^2) + i\xi} = \frac{1}{k} \frac{(1-\beta^2) - i(2\xi)}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi)^2} \quad (22)$$

Clough and Penzien (referência [2]) recomendam tomar o coeficiente de amortecimento histerético como

$$\zeta = 2\xi \quad (23)$$

Assim, se terá

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta^2) + i\zeta} = \frac{1}{k} \frac{(1-\beta^2) - i(\zeta)}{(1-\beta^2)^2 + (\zeta)^2} \quad (24)$$

## 6. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

O par de FT's dadas pelas equações (17) e (18) pode ser avaliado numericamente da seguinte forma:

$$P(\bar{\omega}_n) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} p(t_j) e^{-i2\pi \frac{nj}{N}} \quad (25)$$

$$p(t_n) = \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} P(\bar{\omega}_j) e^{i2\pi \frac{nj}{N}} \quad (26)$$

sendo  $\Delta t$  o incremento em que subdividiu-se o intervalo total de tempo  $T_p$ , ou seja,  $T_p = \Delta t N$ , ou:

$$\Delta t = \frac{T_p}{N} \quad (27)$$

e

$$t_n = n\Delta t = n \frac{T_p}{N} \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (28)$$

O intervalo de frequência é, correspondentemente, subdividido em  $N$  incrementos  $\Delta \bar{\omega}$  expressos como:

$$\Delta \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p} \quad (29)$$

e as frequências discretas dadas por

$$\bar{\omega}_n = n\Delta \bar{\omega} = n \frac{2\pi}{T_p} \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (30)$$

Tendo em vista que

$$\frac{\Delta t \Delta \bar{\omega}}{2\pi} = \frac{1}{N} \quad (31)$$

A resposta, em sua forma discreta será dada por:

$$v(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} H(\bar{\omega}_j) P(\bar{\omega}_j) e^{i2\pi \frac{nj}{N}} \quad (32)$$

## 7. EXEMPLO

Como ilustração considere-se o mesmo exemplo apresentado pela referência [3]. Trata-se de uma torre de caixa d'água mostrada na Fig. 3(a), sujeita a uma carga transiente mostrada na Fig. 3(b).

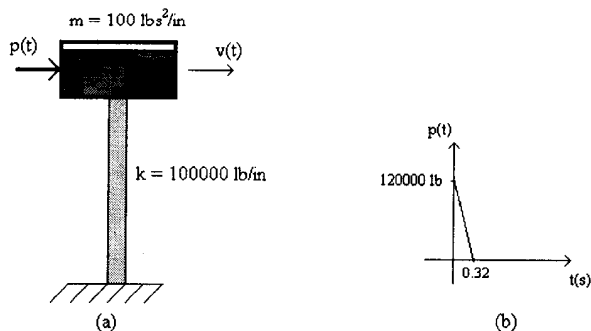


Fig. 3. Torre de caixa d'água sujeita a carga transiente.

Dados:

Massa:  $m = 100 \text{ lbs}^2/\text{in}$

Coefficiente de rigidez:  $k = 100000 \text{ lb}/\text{in}$

Coefficiente de amortecimento: 0.10%

Cálculo do período estendido (de acordo com a referência [4]):

$$T_p = \frac{4.605}{\xi \omega} \quad (33)$$

Onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100000}{100}} = 31.62 \text{ rd / s} \quad (34)$$

Assim

$$T_p = \frac{4.605}{0.10 \cdot 31.62} = 1.46 \text{ s} \quad (35)$$

A seguir se apresentam os gráficos das respostas (Eq. (32), com o uso de FFT). O período estendido foi aquele dado pela Eq.(35). O primeiro gráfico apresenta a resposta para o caso de modelo com amortecimento viscoso (aplicação 1) e o segundo para o caso de amortecimento histerético (aplicação 2). Trata-se o último gráfico da resposta obtida com os dados na referência [3] (aplicação 3).

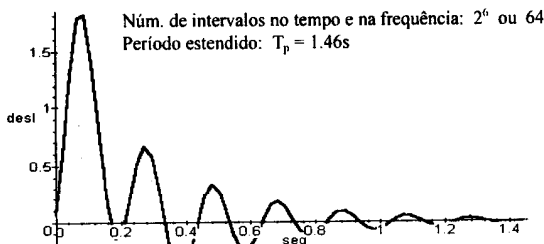


Fig. 4. Resposta com amortecimento viscoso (aplicação 1).

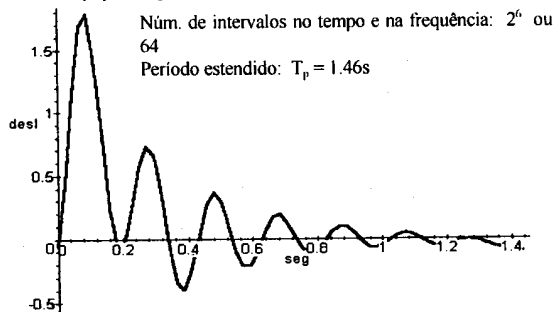


Fig. 5. Resposta com amortecimento histerético (aplicação 2).

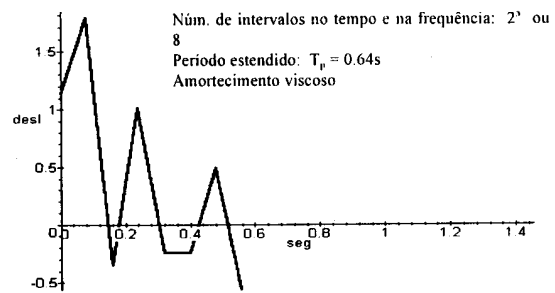


Fig. 6. Resposta obtida na referência [3] (aplicação 3).

Finalizando esta seção, mostram-se na Tabela 1 os deslocamentos máximos e correspondentes ordens de grandeza da parte imaginária do deslocamento real.

Aplicações	Deslocamento máximo	Ordem de grandeza do deslocamento imaginário
Aplicação 1	1.81	$0.253 \times 10^{-4}$
Aplicação 2	1.78	$0.582 \times 10^{-5}$
Aplicação 3	1.78	0.052

Tabela 1. Deslocamentos máximos e ordem de grandeza do deslocamento imaginário

## 8. CONCLUSÕES

Usando-se como parâmetro o deslocamento máximo verifica-se que as três aplicações apresentam resultados equivalentes. Porém, ao se observar o valor da ordem de grandeza da parte imaginária do deslocamento real tornam-se aparentes as diferenças. O fato de a referência [3] usar poucos intervalos no tempo e na frequência ( $2^3$  ou 8) acarretou um gráfico pobre e gerou valores da parte imaginária do deslocamento real com ordem de grandeza de 0.052, que para o tempo  $t = 0.48 \text{ s}$  foi equivalente a aproximadamente 11% do valor da parte real, mostrando imprecisão. Portanto, os resultados mostraram que os procedimentos adotados neste trabalho conduziram a resultados mais precisos.

Com respeito ao gráfico da Fig. 5, vê-se um pequeno erro numérico na resposta (ampliação da amplitude) a partir de  $t = 1.1 \text{ s}$ . Isto é eliminado adotando-se um número de intervalos no tempo e na frequência maior do que  $2^6$ .

## 9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FERREIRA, W.G., Venâncio-Filho, F., Mansur, W.J. e Claret, A.M., **Análise Dinâmica no Domínio da Frequência para Sistemas Unidimensionais Submetidos a Cargas Arbitrárias** (monografia em fase de pré-publicação), 1996
2. CLOUGH, R.W., e Penzien, J., **Dynamics of Structures**, McGraw-Hill, second edition, 1993.
3. PAZ, Mario, **Structural Dynamics, Theory and Computation**, Van Nostrand Reinhold, Second edition, 1985.
4. VENÂNCIO FILHO, F., **Análise Dinâmica no Domínio da Frequência, Sistemas Lineares e Não Lineares**, Conferência de Concurso para Professor Titular da COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, 1994.