

Modelagem epidemiológica determinística sobre dados de HIV/AIDS no município de Castanhal-PA entre os anos de 2000 e 2013

Deterministic epidemiological modeling on HIV/AIDS data in the city of Castanhal-PA between 2000 and 2013

Modelado epidemiológico determinístico sobre datos de VIH/SIDA en el municipio de Castanhal-PA entre los años de 2000 y 2013

Resumo


Neste trabalho aplicamos o modelo epidemiológico determinístico, SI (suscetíveis, infectados), sobre dados reais de HIV/AIDS no município de Castanhal-Pa, entre os anos de 2000 e 2013, o qual foi modelado e solucionado pelo método numérico de Runge-Kutta de 3ª ordem. Para realizar as simulações computacionais, implementamos o método de Runge-Kutta no Ambiente OCTAVE, assim como o modelo determinístico SI. Os parâmetros do modelo determinístico SI, proposto, foram determinados a partir dos referidos dados reais de HIV/AIDS. As soluções numéricas dos suscetíveis e infectados aproximaram-se aos dados reais, respectivamente, os quais foram cedidos pelo Centro Especializado em Assistência a Doenças Infecto Contagiosas (CEADIC), validando assim a metodologia acima proposta. Desenvolvemos análises qualitativas sobre o modelo determinístico SI, o qual apresentou dois pontos de equilíbrios, sendo o primeiro chamado de nó instável e o segundo de ponto de sela. A partir das soluções numéricas foi possível compreender a dinâmica do HIV/AIDS no município de Castanhal-Pa, ou seja, constatamos que a solução de infectados no município possui crescimento exponencial, já a solução de suscetíveis apresenta crescimento polinomial. Além disso, e a partir da solução de infectados, foi possível calcular previsões de novos casos de HIV/AIDS no referido município.


Palavras-chave: Epidemiologia. HIV-AIDS. SI. Runge-Kutta.

Abstract

We apply the deterministic epidemiological model, SI (susceptible, infected), on real HIV/AIDS data in the municipality of Castanhal-PA between 2000 and 2013, which was modeled and solved by the 3rd Order Runge-Kutta Numerical Method. We implemented the Runge-Kutta method in the octave environment and the SI deterministic model to perform computational simulations. The parameters of the proposed deterministic model were determined from the real HIV/AIDS data. The numerical solutions of the susceptible and infected were approached the current data, respectively, which were provided by the Contagious Disease Assistance Specialized Center (Ceadic), thus validating the above methodology. We developed qualitative analyses about the SI deterministic model, which presented two points of balance, the first being called the unstable node and the second seal point. From the numerical solutions, it was possible to understand the dynamics of HIV/AIDS in the municipality of Castanhal-PA; it means that we found that the solution of infected in the municipality has exponential growth, while the susceptible solution has polynomial growth, also from the solution of infected it was possible to calculate predictions of new cases of HIV/AIDS in the said municipality.

Keywords: Epidemiology. HIV-AIDS. SI. Runge-Kutta.

Frayzer Lima de Almeida 
frayzerlima@ufpa.br
Universidade Federal do
Pará (UFPA)

Edyvana G. S. Teixeira 
edyvanateixeira@gmail.
com
Universidade Federal do
Pará (UFPA)

Resumen

En este trabajo aplicamos el modelo epidemiológico determinístico, SI (susceptibles, infectados), sobre datos reales de VIH/SIDA en el municipio de Castanhal-PA entre los años de 2000 y 2013, lo cual fue moldeado y solucionado por el método numérico de Runge-Kutta de 3º orden. Para realizar simulaciones computacionales, implementamos el método de Runge-Kutta en el Ambiente OCTAVE, como también el modelo determinístico SI. Los parámetros del modelo determinístico SI propuesto fueron determinados a partir de los referidos datos reales de VIH/SIDA. Las soluciones numéricas de los susceptibles e infectados se acercan a los datos reales, respectivamente, los cuales fueron cedidos por el Centro Especializado en Atención a Enfermedades Infecto-Contagiosas (CEADIC), convalidando, por lo tanto, la metodología referida anteriormente. Desarrollamos análisis cualitativos sobre el modelo determinístico SI, lo cual presentó dos puntos de equilibrio, siendo el primero llamado de nudo inestable y el segundo de punto de silla. A partir de las soluciones numéricas fue posible comprender la dinámica del VIH/SIDA en el municipio de Castanhal-PA, o sea, comprobamos que la solución de infectados en el municipio posee crecimiento exponencial, ya la solución de susceptibles presenta crecimiento polinómica, también a partir de la solución de infectados fue posible calcular previsiones de nuevos casos de VIH/SIDA en el referido municipio.

Palabras clave: Epidemiología. VIH-SIDA. SI. Runge-Kutta.

1 Introdução

A Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) (do inglês, *Acquired Immune Deficiency*) foi primeiramente constatada nos Estados Unidos em 1981, à qual foi caracterizada pela deteriorização do sistema imunológico. Verificou-se o seu rápido espalhamento nos Estados Unidos particularmente entre homens homossexuais, hemofílicos, usuários de drogas intravenosas e seus parceiros heterossexuais. A partir disto, sugeriu-se tratamento dessa uma doença infecciosa cuja sua transmissão ocorria pelo contato com sangue ou secreções genitais. Em 1983, cientistas do Institut Pasteur, na França, e do National Institute of Health, nos Estados Unidos, mostraram que um vírus era o causador da AIDS, o qual passou a ser chamado de vírus da imunodeficiência humana (HIV) (do inglês, *human immuno deficiency virus*) (ROCHA, 2014; LOPES; PRATA, 2019). Desde então, ao mesmo tempo que esta doença vem se espalhando pelas metrópoles, regiões e cidades do mundo inteiro, entidades governamentais e não governamentais, centros de pesquisas e cientistas vêm aplicando esforços no sentido de pelo menos controlar e/ou conter esta epidemia mundial.

A média de novos casos de HIV/AIDS por ano, no Brasil, é de 36 mil, já o número de óbitos por ano chega a aproximadamente 11,5 mil, segundo o Ministério da Saúde (2012). O município de Castanhal que está localizado na região Nordeste do Estado do Pará a 68 km da capital (Belém), possui aproximadamente 928 casos de HIV/AIDS registrados pelo Centro Especializado em Assistência a Doenças Infecto Contagiosas (CEADIC) no período de 2003 a 2013 (ROCHA, 2014). Graças à existência do CEADIC no município de Castanhal-PA e o seu compartilhamento de dados reais acerca dos casos registrados de HIV/AIDS no referido município é possível desenvolver pesquisas sobre a dinâmica do HIV/AIDS neste município, proporcionando, assim, por parte de entidades públicas, tomadas de decisões no sentido de combater esta doença. Dessa forma, temos, preliminarmente, o trabalho de Rocha (2014) que realizou suas pesquisas sobre os referidos dados reais segundo o modelo epidemiológico determinístico SI (suscetíveis, infectados), simplificado, no período de 2003 a 2013, no município de Castanhal-PA.

Dessa forma, a partir de dados reais de HIV/AIDS cedidos pelo CEADIC/Castanhal-PA entre os anos de 2000 e 2013 (ROCHA, 2014), o presente trabalho propõe através do modelo epidemiológico determinístico SI (suscetíveis, infectados), oriundo do modelo determinístico SIR (suscetíveis, infectados e recuperados), modelar e solucionar, este modelo determinístico, através do método numérico de Runge-Kutta de 3ª ordem, analisar qualitativamente o referido modelo epidemiológico determinístico a partir de seus pontos de equilíbrios singulares, estudar o comportamento e/ou dinâmica da referida epidemia e calcular suas estimativas de previsão, tanto de suscetíveis quanto de infectados no município de Castanhal-PA.

2 Objetivos

- Desenvolver modelagem através do método de Runge-Kutta de 3ª ordem sobre o modelo epidemiológico determinístico SI.
- Relacionar o modelo epidemiológico determinístico SI, proposto, aos dados reais de HIV/AIDS do CEADIC/Castanhal-PA, através dos parâmetros deste modelo determinístico.
- Analisar qualitativamente o modelo epidemiológico determinístico SI, através de sua linearização na vizinhança de seus pontos de equilíbrios singulares.
- Analisar a dinâmica, assim como a previsão de HIV/AIDS no município de Castanhal-PA, através da solução numérica segundo o método de Runge-Kutta de 3ª ordem sobre dados reais de HIV/AIDS do CEADIC/Castanhal-PA entre os anos de 2000 e 2013.

3 Metodologia

Nesta seção foi apresentado o modelo epidemiológico determinístico SI, juntamente com sua justificativa de aplicação a dados reais de HIV/AIDS e sua modelagem segundo o método de Runge-Kutta de 3ª ordem. Em seguida determinou-se os parâmetros do modelo epidemiológico SI a partir de dados reais de HIV/AIDS do CEADIC/Castanhal-PA.

3.1 O modelo epidemiológico SI

A partir dos dados, Tab. (1), aplicou-se o modelo determinístico SI para analisar a população de infectados juntamente com a de suscetíveis no município de Castanhal-PA, assim como calcular suas estimativas de previsões. O modelo epidemiológico determinístico SI é expresso pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} dS(t)/dt = \mu(S(t) + I(t)) - \beta S(t)I(t) \\ dI(t)/dt = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{cases} \quad (1)$$

com $S(t_0) = S_0$ e $I(t_0) = I_0$.

Em que, μ é a taxa de crescimento da população, β é a taxa de transmissão da doença e γ é a taxa de recuperação ou remoção. $S(t)$ é a função que descreve a quantidade de indivíduos suscetíveis ao HIV/AIDS no tempo $t \geq 0$, já $I(t)$ é a função que descreve a quantidade de indivíduos infectados pelo HIV/AIDS também no tempo $t \geq 0$. O número total de indivíduos é dado por $N(t) = S(t) + I(t)$, S_0 e I_0 , são a quantidade de indivíduos suscetíveis e infectados, respectivamente, no tempo inicial.

Um modelo epidemiológico mais geral que o SI e que estuda algumas doenças virais e também o HIV/AIDS pode ser formado pelos três seguintes compartimentos: suscetíveis, infectados e removidos, o qual é denominado de modelo epidemiológico SIR (SOARES, 2010). Os suscetíveis são pessoas saudáveis que têm contato direto (transferência do vírus HIV) com os infectados. Os infectados são os que transmitem a doença e os removidos são os curados ou mortos. No caso do HIV/AIDS os infectados não são curados, porém são tratados em processos de aumento do sistema de defesa do organismo para poder inibir o HIV/AIDS. No entanto, como os dados disponibilizados pelo CEADIC/Castanhal-PA entre os anos de 2000 e 2013 são constituídos apenas pelos números de infectados e da população municipal, optamos pela simplificação do modelo SIR resultando no modelo determinístico SI, o qual está modelado pelas equações diferenciais ordinárias acima, Eq. (1), (ROCHA, 2014). Diferentemente de Rocha (2014), que utilizou o modelo epidemiológico determinístico SI, simplificado, ou seja, admitiu na Eq. (1), que a parcela $\mu(S(t) + I(t))$, fosse composta apenas pelo produto $\mu S(t)$.

3.2 O modelo epidemiológico SI modelado e solucionado pelo método numérico de Runge-Kutta de 3ª ordem

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias com duas equações juntamente com a variável tempo implícita:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = f(S(t), I(t)) \\ \frac{dI(t)}{dt} = g(S(t), I(t)) \\ S(t_0) = S_0 eI(t_0) = I_0 \end{cases} \quad (2)$$

Assim tem-se o problema de valor inicial, onde se assume que f e g sejam contínuas e suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens sejam também contínuas e limitadas na região $a \leq t \leq b$, $-\infty < f < +\infty$, $-\infty < g < +\infty$. Sob estas hipóteses é possível calcular aproximações para a solução do problema de valor inicial acima e, é o que apresentamos a seguir.

Um dos métodos numéricos para resolver o problema de valor inicial, Eq. (2), é o método de Runge-Kutta de terceira ordem, (BARROSO et al.,1987; SCHEID, 1989), o qual é descrito a seguir:

$$\begin{cases} S(t_{i+1}) = S(t_i) + h\varphi(S_i, I_i) \\ I(t_{i+1}) = I(t_i) + h\omega(S_i, I_i) \\ t_{i+1} - t_i = h, i = 0, 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (3)$$

tal que $\varphi(S_i, I_i) = \alpha K_1 + \beta K_3 + \gamma K_5$, $\omega(S_i, I_i) = \alpha K_2 + \beta K_4 + \gamma K_6$, em que $K_1 = f(S_i, I_i)$, $K_2 = g(S_i, I_i)$, $K_3 = f(S_i + phK_1, I_i + qhK_2)$, $K_4 = g(S_i + phK_1, I_i + qhK_2)$, $K_5 = f(S_i + uhK_3, I_i + vhK_4)$, $K_6 = g(S_i + uhK_3, I_i + vhK_4)$, com $S^1 = f(S_i, I_i)$ e $I^1 = g(S_i, I_i)$. Onde φ e ω são as funções incrementos e h é o comprimento do passo. Sendo $S(t_{i+1})$ e $I(t_{i+1})$ as aproximações de suscetíveis e infectados no tempo t_{i+1} , com $i = 0, 1, \dots, m - 1$, assim tem-se que $S(t_i) = S_i$ e $I(t_i) = I_i$ com $i = 0, 1, \dots, m - 1$.

As constantes $\alpha, \beta, \gamma, p, q, u$ e v em K_3, K_4, K_5 e K_6 devem ser determinadas para que se obtenha o método de Runge-Kutta de 3ª ordem. Para isso os seguintes passos são seguidos:

Por um lado, entendendo as funções K_3, K_4, K_5 e K_6 , em duas variáveis, desenvolve-se as expansões de K_3, K_4, K_5 e K_6 , respectivamente, na série de Taylor até o termo de 2ª ordem no ponto (S_i, I_i) :

$$K_3 \cong f + phK_1f_S + qhK_2f_I + \left(\frac{1}{2}\right)(phK_1) \frac{\partial(phK_1f_S + qhK_2f_I)}{\partial S} + \left(\frac{1}{2}\right)(qhK_2) \frac{\partial(phK_1f_S + qhK_2f_I)}{\partial I} \quad (4)$$

$$K_4 \cong g + phK_1g_S + qhK_2g_I + \left(\frac{1}{2}\right)(phK_1) \frac{\partial(phK_1g_S + qhK_2g_I)}{\partial S} + \left(\frac{1}{2}\right)(qhK_2) \frac{\partial(phK_1g_S + qhK_2g_I)}{\partial I} \quad (5)$$

$$K_5 \cong f + uhK_3f_S + vhK_4f_I + \left(\frac{1}{2}\right)(uhK_3) \frac{\partial(uhK_3f_S + vhK_4f_I)}{\partial S} + \left(\frac{1}{2}\right)(vhK_4) \frac{\partial(uhK_3f_S + vhK_4f_I)}{\partial I} \quad (6)$$

$$K_6 \cong g + uhK_3g_S + vhK_4g_I + \left(\frac{1}{2}\right)(uhK_3) \frac{\partial(uhK_3g_S + vhK_4g_I)}{\partial S} + \left(\frac{1}{2}\right)(vhK_4) \frac{\partial(uhK_3g_S + vhK_4g_I)}{\partial I} \quad (7)$$

Ao substituir K_1 e K_2 e as aproximações, equações (4) - (7), de K_3, K_4, K_5 e K_6 , na Eq. (3), resulta em aproximações para $S(t_{i+1})$ e $I(t_{i+1})$, segundo a série de Taylor de 3ª ordem em duas variáveis.

Por outro lado, expandimos, em séries de Taylor de 3ª ordem, as soluções teóricas $S(t)$ e $I(t)$ no ponto t_i :

$$S(t_{i+1}) \cong S(t_i) + \frac{h}{1!}S^1(t_i) + \frac{h^2}{2!}S^2(t_i) + \frac{h^3}{3!}S^3(t_i) \quad (8)$$

$$I(t_{i+1}) \cong I(t_i) + \frac{h}{1!}I^1(t_i) + \frac{h^2}{2!}I^2(t_i) + \frac{h^3}{3!}I^3(t_i) \quad (9)$$

em que $S^1(t_i) = f, S^2(t_i) = (f_S f + f_I g), S^3(t_i) = (f_{SS} f f + f_S f_S f + 2f_{SI} f g + f_I g_S f + f_S f_I g + f_{II} g g + f_I g_I g),$
 $I^1(t_i) = g, I^2(t_i) = (g_S f + g_I g), I^3(t_i) = (g_{SS} f f + g_S f_S f + 2g_{SI} f g + g_I g_S f + g_S f_I g + g_{II} g g + g_I g_I g).$

Ao substituir $S^1(t_i)$, $S^2(t_i)$ e $S^3(t_i)$ na Eq. (8) e substituir $I^1(t_i)$, $I^2(t_i)$ e $I^3(t_i)$ na Eq. (9), resultam em aproximações para $S(t_{i+1})$ e $I(t_{i+1})$, segundo a série de Taylor de 3ª ordem em uma variável. Agora, através das aproximações das soluções $S(t_{i+1})$ e $I(t_{i+1})$, obtidas tanto segundo a série de Taylor de 3ª ordem em duas variáveis, quanto às aproximações obtidas segundo a série de Taylor de 3ª ordem em uma variável, comparamos os termos de mesma potência, com relação a h , tanto para $S(t_{i+1})$, quanto para $I(t_{i+1})$, respectivamente, de onde obtemos o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta p + \gamma u = 1/2 \\ \gamma u^2 + \beta p^2 = 1/3 \\ \gamma u p = 1/6 \\ \beta p q + \gamma u v = 1/3 \\ \gamma v p = 1/6 \\ \gamma u q = 1/6 \\ \gamma v^2 + \beta q^2 = 1/3 \\ \gamma v q = 1/6 \\ \beta q + \gamma v = 1/2 \end{cases} \quad (10)$$

Ao considerar-se todas estas incógnitas diferentes de zero e, se $u = v$ e, $p = q$ tomando $u = v = a$ e $p = q = b$ temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta b + \gamma a = 1/2 \\ \gamma a^2 + \beta b^2 = 1/3 \\ \gamma a b = 1/6 \end{cases} \quad (11)$$

Finalmente, tomando $a = b$ e $\beta = \gamma$, temos: $a=b = 2/3$, $\beta = \gamma = 3/8$ e $\alpha = 1/4$. Dessa forma, temos que: $p = q = u = v = 2/3$, $\beta = \gamma = 3/8$ e $\alpha = 1/4$.

Esta modelagem, segundo o método numérico de Runge-Kutta de 3ª ordem sobre o modelo SI, equação (1), foi implementada no ambiente computacional OCTAVE, a partir do qual obtemos as soluções aproximadas para os suscetíveis e os infectados no município de Castanhal-PA. No entanto, para chegarmos a este resultado, precisamos determinar os parâmetros μ , β e γ do modelo SI, Eq. (1), e é o que vamos discutir a seguir.

3.3 A determinação dos parâmetros μ , β e γ do modelo SI em relação aos dados reais de HIV/AIDS do CEADIC/Castanhal-PA

Para determinar os parâmetros μ , β e γ do modelo SI, Eq. (1), utilizamos os dados reais de HIV/AIDS do CEADIC/Castanhal-PA (ROCHA, 2014), o qual é apresentado na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1 - Números de infectados, $I(t)$, e suscetíveis, $S(t)$, de HIV/AIDS e, o número da população, $N(t)$, no município de Castanhal-PA entre os anos de 2000 e 2013, em que $N(t) = S(t) + I(t)$.

| Ano | Nº de Infectados | Nº da População | Nº de Suscetíveis |
|------|------------------|-----------------|-------------------|
| 2000 | 3 | 130630 | 130627 |
| 2001 | 6 | 134138 | 134132 |
| 2002 | 4 | 137740 | 137736 |
| 2003 | 15 | 141440 | 141425 |
| 2004 | 33 | 145238 | 145205 |
| 2005 | 49 | 149138 | 149089 |
| 2006 | 44 | 153143 | 153099 |
| 2007 | 63 | 157256 | 157193 |
| 2008 | 71 | 161479 | 161408 |
| 2009 | 70 | 165815 | 165745 |
| 2010 | 105 | 170268 | 170163 |
| 2011 | 131 | 174840 | 174709 |
| 2012 | 124 | 179536 | 179412 |
| 2013 | 153 | 184357 | 184204 |

Fonte: Rocha (2014).

A Tabela 1 apresenta o número de infectados com HIV/AIDS, assim como o número da população e número de suscetíveis ao vírus HIV/AIDS no município de Castanhal-PA, cedidos pelo CEADIC/Castanhal-PA. Ver Rocha (2014).

O parâmetro β é calculado através da razão entre a média aritmética de infectados com a média aritmética da população conforme dados da Tab. (1). A partir das médias aritméticas dos infectados e suscetíveis, da taxa dos suscetíveis, obtida a partir de regressão linear, e da estimativa do parâmetro β , já calculado, é possível determinar o parâmetro μ , ao substituir estes valores na primeira equação diferencial da Eq. (1) e isolar o parâmetro μ . Da mesma forma, a partir das médias aritméticas dos infectados e suscetíveis, da taxa dos infectados, também obtida a partir de regressão linear, e da estimativa do parâmetro β , é também possível determinar o parâmetro γ , ao substituir estes valores na segunda equação diferencial da Eq. (1) e isolá-lo; sem considerar que, as médias aritméticas dos infectados e suscetíveis, a taxa dos suscetíveis e a taxa dos infectados estão todos normalizados pela média aritmética da população, Tabela 1. Assim temos, $\beta = 3.986237184316101e - 004$, $\mu = 0.02636508862492$ e $\gamma = -0.18651313104924$.

Assim, dado que estes parâmetros são determinados a partir de equações algébricas normalizadas pela média aritmética da população, cabe ressaltar que na implementação, no Ambiente OCTAVE, do método de Runge-Kutta de 3ª ordem sobre o modelo SI, Eq. (1), as soluções aproximadas de suscetíveis e infectados estão normalizadas durante o processo de simulação computacional, porém ao final do processamento estas soluções são desnormalizadas.

4 Resultados e discussão

Nesta seção será apresentada a análise qualitativa do modelo epidemiológico determinístico, Eq. (1), através de sua linearização na vizinhança de seus pontos de equilíbrios singulares, em seguida vamos analisar a dinâmica do HIV/AIDS no município de Castanhal-PA, assim como a previsão de suscetíveis e infectados a partir de 2013.

4.1 Análise qualitativa do modelo epidemiológico determinístico SI

A partir da Eq. (1) consideremos o seguinte sistema algébrico:

$$\begin{cases} \mu(S(t) + I(t)) - \beta S(t)I(t) = 0 \\ \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Primeiro, se $I(t) = 0$, logo $\mu S(t) = 0$, e como $\mu \neq 0$, então $S(t) = 0$. Portanto o ponto $P = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio da Eq. (1). Em segundo, se $I(t) \neq 0$, logo $\beta S(t) - \gamma = 0$, assim $S(t) = \gamma/\beta$, e conseqüentemente, $I(t) = \mu\gamma / (\gamma - \mu)\beta$. Logo, o ponto $Q = (\mu\gamma / (\gamma - \mu)\beta, \gamma/\beta)$ é o segundo ponto de equilíbrio da Eq. (1), dado que $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq \mu$.

A matriz jacobiana que lineariza a Eq. (1) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} (\mu - \beta I) & (\mu - \beta S) \\ (\beta I) & (\beta S - \gamma) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Para o ponto de equilíbrio, a equação polinomial característica obtida é a seguinte:

$$\det(A(P) - \tau I_0) = (\mu - \tau)(-\gamma - \tau) = 0 \quad (14)$$

em que I_0 é a matriz identidade de ordem 2, $A(P)$ é a matriz jacobiana, Eq. (13), no ponto de equilíbrio P . As raízes da Eq. (14) são as seguintes: $\tau_1 = \mu$ e $\tau_2 = -\gamma$. Como $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ (pois $\gamma < 0$) e $\tau_1 \neq \tau_2$, então o ponto P é um ponto de equilíbrio instável, chamado nó instável (ZILL; CULLEN, 2001). Assim, para qualquer condição inicial, (I_0, S_0) , na vizinhança do ponto $P = (0,0)$, os pontos na curva do retrato de fase, $(I(t), S(t)) \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$, dessa forma infectados e suscetíveis coexistem.

Já, para o ponto de equilíbrio $Q = (\mu\gamma / (\gamma - \mu)\beta, \gamma/\beta)$, a equação polinomial característica obtida é a seguinte:

$$\det(A(Q) - \tau I_0) = \tau^2 + \left(\frac{\mu^2}{\gamma - \mu}\right)\tau + \mu\gamma = 0 \quad (15)$$

em que I_0 é a matriz identidade de ordem 2, $A(Q)$ é a matriz jacobiana, Eq. (13), no ponto de equilíbrio Q .

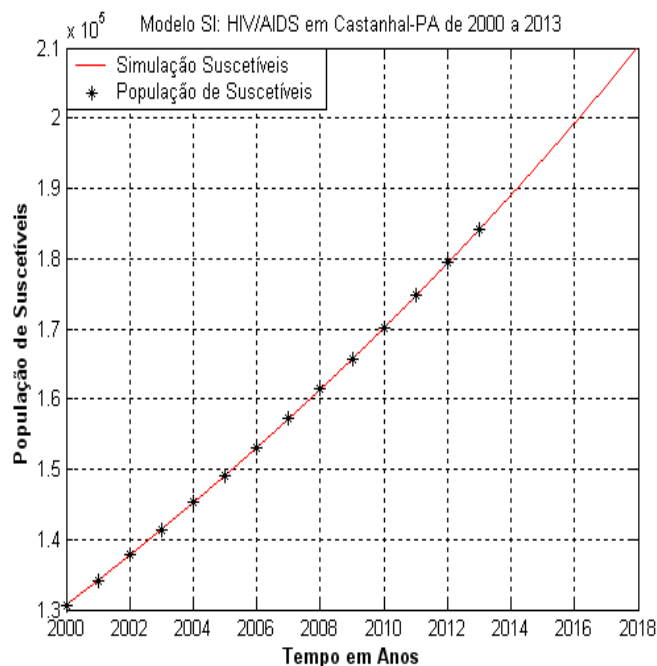
As raízes da Eq. (14) são as seguintes: $\tau_{3,4} = \left(-\left(\frac{\mu^2}{\gamma - \mu}\right) \pm \sqrt{\Delta}\right)/2$, em que $\Delta = \left(\frac{\mu^2}{\gamma - \mu}\right)^2 - 4\mu\gamma$. Como $\tau_4 > 0 > \tau_3$, então o ponto Q é um ponto de equilíbrio instável, chamado ponto de sela (ZILL; CULLEN, 2001). Para este ponto de equilíbrio existem três regiões no plano (a primeira região são semiplanos formados pela intersecção de duas retas não colineares, a segunda e terceira regiões são estas retas não colineares às quais contém os autovetores associados aos seus autovalores τ_3 e τ_4 , respectivamente). Se uma dada condição inicial, (I_0, S_0) , encontra-se distante do ponto Q e pertencente à primeira região, então os pontos na curva do retrato de fase, $(I(t), S(t))$, aproximam-se de Q e, em seguida, afastam-se do ponto Q , quando $t \geq t_0$, assim infectados e suscetíveis também coexistem. Por outro lado, se outra condição inicial, (I_0, S_0) , encontra-se distante do ponto Q e pertencente à segunda região, então os pontos na curva do retrato de fase, $(I(t), S(t)) \rightarrow Q$, quando $t \rightarrow +\infty$, dessa forma infectados e suscetíveis coexistem assintoticamente, ou seja, $I(t) \rightarrow \mu\gamma / (\gamma - \mu)\beta$ e $S(t) \rightarrow \gamma / \beta$, quando $t \rightarrow +\infty$. E finalmente, se doutra condição inicial, (I_0, S_0) , encontra-se próxima do ponto Q e pertencente à terceira região no plano, então os pontos na curva do retrato de fase, $(I(t), S(t)) \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$, dessa forma infectados e suscetíveis também coexistem.

4.2 A dinâmica do HIV/AIDS no município de Castanhal-Pa

Nesta seção vamos apresentar as soluções do modelo epidemiológico SI através do método numérico de Runge-Kutta de 3ª ordem, a partir de dados reais de HIV/AIDS no município de Castanhal-PA entre os anos de 2000 a 2013, assim como analisar a monotonicidade das soluções e previsões do HIV/AIDS no município de Castanhal a partir do ano de 2013.

Dessa forma, para o modelo SI, Eq. (1), e a partir das seguintes condições iniciais $S_0 = 1.3062e + 005$, $I_0 = 13.47$, juntamente com os parâmetros β, μ e γ , temos o comportamento dos suscetíveis e infectados através das Figs 1 e 2, respectivamente, proposto por este trabalho.

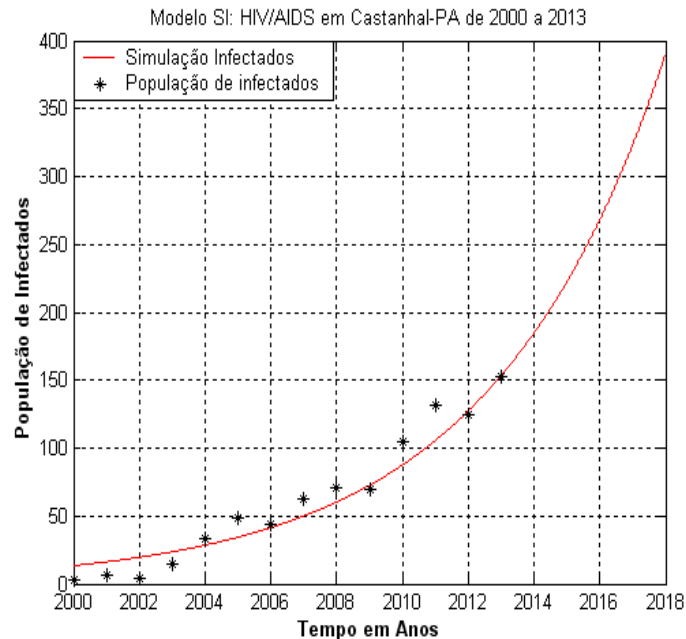
Figura 1 - População de Suscetíveis (HIV/AIDS) no município de Castanhal-PA de 2000 a 2013, juntamente com a sua simulação de suscetíveis através da Eq. (1).



Fonte: Próprio autor, 2019.

Observa-se, na Fig. 1, que a simulação de suscetíveis aproxima-se aos dados reais de suscetíveis de HIV/AIDS no município de Castanhal-PA, que também é verificado que a simulação de suscetíveis cresce com o passar dos anos e que este crescimento é de ordem polinomial. A partir do ano de 2013, é possível realizar estimativas de previsão através da curva de simulação de suscetíveis presentes na Fig. 1. Por exemplo, a partir do ano de 2013 é possível estimar um crescimento aproximadamente de 16% de suscetíveis para o ano de 2016, corroborando assim para um crescimento de ordem polinomial, ou seja, um “lento” crescimento.

Figura 2 - População de infectados (HIV/AIDS) no município de Castanhal-PA de 2000 a 2013, juntamente com a sua simulação de infectados através da Eq. (1).



Fonte: Próprio autor, 2019.

Também pode ser observado, na Fig. 2, que a simulação de infectados aproxima-se aos dados reais de infectados de HIV/AIDS no município de Castanhal-PA, é verificado que a simulação de infectados cresce com o passar dos anos e que este crescimento é de ordem exponencial, ou seja, para um breve intervalo de tempo ocorre um rápido crescimento da população de infectados. A partir do ano de 2013, também é possível realizar estimativas de previsão através da curva de simulação de infectados presente na Fig. 2. Por exemplo, a partir do ano de 2013 é possível estimar um crescimento aproximadamente de 75% de infectados para o ano de 2016. Assim, comparando este valor percentual de infectados em relação ao percentual de suscetíveis, que é de 16%, para o mesmo intervalo de tempo, entre 2013 e 2016, constata-se, empiricamente, um crescimento de ordem exponencial de infectados. A partir do ano de 2013, seria interessante realizar o cruzamento e/ou comparação entre a curva de infectados simulada e os dados reais a partir de 2013 cedidos pelo CEADIC/Castanhal-PA, porém o referido Centro, atualmente, já não disponibiliza tais dados acerca de infectados de HIV/AIDS.

5 Conclusão

A partir da Equação (1), foi possível desenvolver sua análise qualitativa, onde constatamos dois pontos de equilíbrios, sendo o primeiro, $P = (0,0)$, denominado nó instável, e o segundo, $Q = (\mu\gamma / (\gamma - \mu) \beta, \gamma / \beta)$, chamado ponto de sela. Para o primeiro ponto de equilíbrio, P , constatamos que os retratados de fase em sua vizinhança constituem em soluções que se afastam radialmente de P , i.e, $(I(t), S(t)) \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$, resultando em infectados e suscetíveis que coexistem. Já, para o segundo ponto de equilíbrio, Q , constatamos que os retratados de fase em sua vizinhança constituem em soluções ou que se aproximam e, em seguida, se afastam de Q , ou que tendem a Q , i.e, $(I(t), S(t)) \rightarrow Q$, quando $t \rightarrow +\infty$, ou que simplesmente se afastam de Q , i.e, $(I(t), S(t)) \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$, resultando ou em infectados e suscetíveis que coexistem, ou em infectados e suscetíveis que coexistem assintoticamente, ou em infectados e suscetíveis que também coexistem, respectivamente.

A Equação (1), modelo determinístico SI, mostrou-se adequada quando solucionada pelo método numérico de Runge-Kuta de 3ª ordem, uma vez que ao aplicá-la a dados reais de HIV/AIDS no município de Castanhal-PA entre os anos de 2000 e 2013, verificou-se nas Figs. 1 e 2 boas representações dos suscetíveis e infectados, respectivamente, através de suas soluções numéricas, pois elas aproximam-se aos dados reais de suscetíveis e infectados, respectivamente.

Constatou-se que a solução numérica da Eq. (1) tanto para suscetíveis quanto para infectados, Figs. 1 e 2, apresentam populações crescentes e que estão de acordo com os dados reais obtidos entre os anos de 2000 e 2013, Tab. (1); sendo a solução de suscetíveis de crescimento polinomial e a de infectados de crescimento exponencial. Também, a partir destas soluções, foi possível realizar previsões referentes aos números de suscetíveis e infectados de HIV/AIDS no município de Castanhal-PA em anos posteriores a 2013, Figs. 1 e 2. Ou seja, a partir do quantitativo de suscetíveis, Fig. 1, do ano de 2013 para o ano de 2016, foi possível prever um acréscimo de aproximadamente 16% de suscetíveis. Já o quantitativo de infectados, Fig. 2, do ano de 2013 para o ano de 2016, foi possível prever um acréscimo de aproximadamente 75% de infectados.

Para dados reais de quaisquer doenças com caráter epidêmico, desde que exista um modelo epidemiológico determinístico, é possível aplicar o método numérico de Runge-Kuta de 3ª ordem, para desenvolver a análise da dinâmica e as estimativas de previsão dessas doenças.

Apesar dos dados cedidos pelo CEADIC/Castanhal-Pa, constantes em Rocha (2014), referirem-se aos anos de 2000 a 2013, é possível gerar perfeitamente um ambiente favorável ao desenvolvimento de pesquisas, no âmbito, pelo menos, de um curso de Licenciatura em Matemática, segundo metodologias técnico-científicas em estudos de casos, com a aplicação de métodos matemáticos a dados reais, e com consequente análise e discussão de seus resultados.

A partir da análise do comportamento de epidemias e suas previsões através da modelagem biomatemática, em particular modelagem epidemiológica determinística e/ou estocástica, é possível que entidades governamentais desenvolvam políticas públicas e/ou campanhas (TV, rádio e/ou internet) de saúde segundo essas informações para que não ocorram e/ou minimizem epidemias que afligem o país.

Referências

- BARROSO, L. C. *et al.* **Cálculo Numérico (Com Aplicações)**. 2 ed. São Paulo: Editora Harbra, 1987.
- BRASIL. Ministério da Saúde. **Boletim Epidemiológico HIV/AIDS**, até a semana epidemiológica 52º-dezembro/2012, Brasília, ano I, n. 01, 2012. Disponível em: <http://www.aids.gov.br/publicacao/2012/boletim-epidemiologico-hiv-aids-2012>. Acesso em: 02 mar. 2023.
- LOPES, L. E. S.; PRATA, R. A. C. Modelo epidemiológico para a aids em Manaus-AM com solução interativa fuzzy. **Biomatemática**, Campinas, v. 29, p. 69 – 80, 2019. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio29_art6.pdf. Acesso em: 02 mar. 2023.
- ROCHA, M. M. **Análise de Previsões de Casos de HIV/AIDS em Castanhal mediante um Modelo Epidemiológico Determinístico**. 2014. 62 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Castanhal/PA, 2014. Disponível em: https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/bitstream/prefix/4191/1/TCC_ComparacaoMetodosRunge-Kutta.pdf. Acesso em: 02 mar. 2023.
- SCHEID, F. **Schaum's outline of theory and problems of numerical analysis**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1989.
- SOARES, A. L. O. **Modelagem Alternativa para Sistemas Epidemiológicos**. 2010. 98 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do ABC, Santo André/SP, 2010.
- ZILL, D. G; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 2.

Sobre os autores

Frayzer Lima de Almeida

Técnico em Mineração pela Escola Técnica Federal do Pará, Bacharel em Matemática, Mestre em Geofísica (Métodos Elétricos e Eletromagnéticos) e Doutorando em Geofísica (Métodos Elétricos e Eletromagnéticos) (tese defendida e aceita em 05/02/2010), pela Universidade Federal do Pará. Atualmente é Prof. Assistente da Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Castanhal da Universidade Federal do Pará. Áreas de interesse: Otimização Matemática, Geofísica dos Métodos Elétricos e Eletromagnéticos, Matemática Discreta (Teoria dos Números), Estatística (Análise Multivariada) e Modelagem Epidemiológica Determinística.

Edyvana Gabriela da Silva Teixeira

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará, Especializada em Matemática e suas tecnologias e Mundo do Trabalho pela Universidade Federal do Piauí. Atualmente professora atuante em uma empresa privada de ensino na cidade de Castanhal-PA. Áreas de interesse: Modelagem Epidemiológica Determinística, Estatística e Ensino da Matemática.

Avaliado em: 19.04.2022

Aceito em: 15.03.2023

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará, Especializada em Matemática e suas tecnologias e Mundo do Trabalho pela Universidade Federal do Piauí. Atualmente professora atuante em uma empresa privada de ensino na cidade de Castanhal-PA. Áreas de interesse: Modelagem Epidemiológica Determinística, Estatística e Ensino da Matemática.

Edyvana Gabriela da Silva Teixeira: