

Desenvolvimento de algoritmo de análise em pórticos tridimensionais pelo método dos elementos finitos

Development of an Algorithm for the analysis of a three-dimensional portico by the finite element method

Desarrollo de algoritmos de análisis en marcos tridimensionales utilizando el método de elementos finitos

Resumo

O método dos elementos finitos tem sido utilizado como uma ferramenta de análise estrutural para determinação de deslocamentos, esforços e tensões, cujo objetivo é proporcionar uma modelagem do sistema, transformando-o em um número finito de elementos mais simplificados a serem solucionados, obtendo uma aproximação para o sistema completo resultante dos vários elementos agrupados. A aplicação do método dos elementos finitos vem se expandindo muito nas últimas duas décadas, em decorrência da automatização das rotinas de cálculo que a programação possibilita, aliada à necessidade do grande processamento de dados na resolução dos problemas estruturais. A partir da relevância dos fatos apresentados, o presente estudo se remete ao desenvolvimento de uma ferramenta computacional intitulada de PorticoFEM3D, se utilizando da linguagem de programação C, que é capaz de modelar pórticos tridimensionais e realizar a análise estrutural que engloba a determinação dos deslocamentos e reações de uma estrutura. A análise tridimensional, por intermédio da rigidez relativa a tais esforços, considera os esforços seccionais axial e torção e também os esforços transversais, sendo estes: esforço cortante e o fletor. Assim, posteriormente foi modelado um problema de pórtico espacial, sendo os resultados da análise comparados com a solução do mesmo problema modelado no *software* Structural Robot e desenvolvido pela Autodesk, onde foi avaliada a funcionalidade e adequação do algoritmo, tendo como base o *software* comercial de referência para carregamentos pontuais.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. Software. Esforço. Matriz. Deslocamento. Pórtico.

Abstract

The finite element method has been used as a structural analysis tool for determining displacements, efforts, and stresses, whose objective is to provide a modeling of the system, transforming it into a finite number of more simplified elements to be solved, obtaining an approximation for the complete system resulting from the various grouped elements. The application of the finite element method has been increasingly expanding in the last two decades due to the automation of calculation routines that programming makes possible, together with the need for data processing in solving structural problems. Based on the relevance of the facts presented, the present study refers to the development of a computational tool called PorticoFEM3D, using the C programming language, which is capable of modeling three-dimensional frames and performing the structural analysis that includes the determination of displacements and reactions of a structure. Through the stiffness related to such efforts, the three-dimensional analysis considers the axial and torsional sectional and the transverse ones: shear and bending. Thus, a spatial frame problem was subsequently modeled, and the results of the analysis were compared with the solution of the same problem modeled in the Structural Robot software and developed by Autodesk, where the functionality and adequacy of the algorithm were evaluated, based on the commercial software of reference for point loads.

Keywords: Finite Element Method. Software. Effort. Headquarters. Displacement. Portico

Bruno da Silva Sales  
bruno.silva0374@hotmail.com

Iuri Alves Ferreira  
iurialves@gmail.com

Resumen

El método de elementos finitos está siendo utilizado como herramienta de análisis estructural para determinación de desplazamientos, esfuerzos y tensiones, cuyo objetivo es proporcionar un modelaje del sistema, transformándolo en un número finito de elementos más simplificado para que sean resueltos, obteniendo un acercamiento para el sistema complejo resultante de los varios elementos reunidos. La aplicación del método de elementos finitos está expandiendo mucho en las dos últimas décadas, en consecuencia de la automatización de las rutinas de cálculo que la programación posibilita, aliada a la necesidad del gran procesamiento de datos en la resolución de problemas estructurales. A partir de la relevancia de los hechos presentados, el presente estudio se remete al desarrollo de una herramienta computacional titulada de PorticoFEM3DA, utilizándose del lenguaje de programación C, que es capaz de moldear pórticos tridimensionales y realizar el análisis estructural que envuelve la determinación de los desplazamientos y reacciones de una estructura. El análisis tridimensional, por intermedio de la relativa rigidez a tales esfuerzos, considera los esfuerzos seccionales axial y torsor y también los esfuerzos transversales, siendo estos: esfuerzo cortante y el momento de flexión. Así, posteriormente fue moldeado un problema de pórtico espacial, siendo los resultados del análisis comparados con la solución del mismo problema moldeado en software Structural Robot y desarrollado por Autodesk, donde la funcionalidad y adecuación del algoritmo fue evaluada, teniendo como base el software comercial de referencia para cargamentos puntuales.

Palabras clave: Método de Elementos Finitos. Software. Esfuerzo. Matriz. Desplazamiento. Pórtico.

1 Introdução

A área de projetos de estruturas é uma das aplicações da engenharia civil em que muitos profissionais se aprofundam, sendo popularmente conhecidos como calculistas. Dentre estes profissionais destaca-se Timoshenko (1878-1972), considerado um dos pais da engenharia estrutural moderna, o mesmo publicou o livro intitulado *História da resistência dos materiais* (TIMOSHENKO, 1983), onde descreveu um histórico do desenvolvimento técnico e teórico sobre o comportamento das estruturas. Tal subárea da engenharia civil se preocupa em realizar o planejamento, projeto e manutenção de sistemas estruturais para as mais diversas finalidades do ramo da construção de obras civis (MARTHA, 2010).

O projeto estrutural usualmente é dividido em quatro etapas principais, sendo elas: concepção, análise, dimensionamento e, por fim, o detalhamento. A etapa de análise estrutural é uma fase de grande relevância ao longo do desenvolvimento do projeto estrutural, sendo através desta possível entender o comportamento do edifício. Caso a análise estrutural não seja bem realizada, certamente o dimensionamento dos elementos que constituem a estrutura não será adequado, podendo adentrar nos casos de superdimensionamento ou pior, na situação de subdimensionamento (KIMURA, 2018).

A análise estrutural é tida como a etapa do desenvolvimento do projeto estrutural na qual é realizada toda a avaliação do comportamento estrutural, sendo este comportamento expresso por vários parâmetros, tais como: deslocamentos, deformações e campos de tensões ao longo da estrutura. Tal análise é realizada para os possíveis estádios de solicitação e carregamentos previamente determinados no elemento estrutural (SUSSEKIND, 1980).

Os modelos analíticos clássicos levam ao cálculo de soluções exatas, dos dados de saída do estudo de uma estrutura. Entretanto, tais soluções clássicas possuem aplicações em apenas alguns casos com elevado grau de especificidade, que se distancia muito das aplicações e necessidades práticas da realidade na engenharia, em que, por vezes, faz-se necessário realizar aproximações e considerações para se possibilitar a modelagem do problema. A partir desta barreira surgiu a necessidade de evolução de uma metodologia capaz de ser aplicada de forma mais geral possível, sem ter que se limitar pela geometria do “corpo” em análise, bem

como sua condição de carregamento (KIM, 2000). Assim, o caminho alternativo que foi criado para solucionar a incapacidade de métodos clássicos analíticos foi intitulado enquanto método dos elementos finitos. O mesmo recebeu tal nome em decorrência de sua idealização se dar pela subdivisão de uma estrutura complexa e inteira em seus elementos individuais, elementos estes que são mais simplificados, entretanto que mantêm as propriedades do meio original; compreendendo a rigidez de todos os elementos de forma isolada e caracterizados por nós. Pode-se, então, ter o entendimento da rigidez de todo o conjunto, bem como por indução da peça estrutural que todos os elementos fazem parte, tendo por consequência pleno entendimento de como toda a estrutura se comporta (ALVES FILHO, 2000).

Uma das diversas vantagens do método dos elementos finitos (MEF) é a disposição que a generalização do método possui em poder ser aplicado para a resolução de problemas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, constituídos por vários materiais diferentes e com fronteiras irregulares nas mais inusitadas geometrias que a realidade pode apresentar. O mesmo possui várias formulações possíveis, desde problemas estáticos – como é o caso da análise estrutural de edificações –, até as abordagens mais complexas como nos problemas dinâmicos; estendendo-se aplicações como o da transferência de calor, eletromagnetismo, vibrações mecânicas e acústicas, e até aplicações no ramo da biomedicina, como é o caso de estudo de próteses, reconstituição de arcada dentária e reconstituição de fraturas ósseas. O objetivo do método é a formulação, com o auxílio dos programas computacionais, que permita compreender a análise de sistemas complexos que também podem ser irregulares (ZIENKIEWICZ, 2005).

Para conseguir atingir os objetivos estipulados, a metodologia do presente estudo consiste em desenvolver um algoritmo que se utilize da linguagem de programação C, a partir do ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) Code Blocks, tendo uma formulação matemática orientada pelo método dos elementos finitos, a fim de possibilitar a modelagem e análise de pórticos tridimensionais. Este algoritmo desenvolvido foi intitulado pela nomenclatura de PorticoFEM3D, tendo em vista sua funcionalidade.

2 Fundamentação Teórica

A metodologia de cálculo para o método dos elementos finitos (MEF) baseia-se no método da rigidez direta. Utilizando-se da equação constitutiva, que pode ser interpretada como o equilíbrio das forças nodais externas atuando na estrutura, sendo igual ao produto da rigidez da estrutura pelos deslocamentos nodais. Como o MEF é solucionado por meio de sistemas lineares, ou seja, com o uso de matrizes, faz-se necessário que cada uma das incógnitas (F , K , δ) seja trabalhada em um modelo matricial. A determinação da matriz de rigidez do elemento local é obtida conhecendo cada um dos coeficientes de rigidez da mesma. Assim, considerando uma barra tridimensional disposta de dois nós em suas extremidades, cada um dos seus nós possui seis graus de liberdade, sendo eles (F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z). Portanto resultando em doze graus de liberdade na matriz de rigidez $[K]$ do elemento de barra tridimensional, que será representada por uma matriz de ordem doze (SORIANO, 2003).

Estando o elemento de barra sob a ação simultânea de esforços axiais, torção, cortante e flexão nos planos perpendiculares atuante nos eixos principais centrais, faz-se, então, fundamental obter os coeficientes de rigidez decorrente de tais esforços para o elemento de barra, sendo possível montar a matriz de rigidez do elemento de barra local que pode tratar de um elemento de viga ou pilar. Só então, por meio da matriz de rotação, realiza-se a transformação dos eixos locais em globais de um dado elemento. Por fim, por meio do mapeamento é realizada a montagem da matriz de rigidez da estrutura através das matrizes de rigidez de seus elementos, determinando os parâmetros de análise desejados abordados no presente estudo de deslocamentos e reações (ALVES FILHO, 2000).

2.1 Formulação da matriz de rigidez do elemento

Os coeficientes constituintes da matriz de rigidez de um elemento de barra são obtidos por meio da aplicação do método das forças, em que, a partir da imposição de deslocamentos de valores unitários, de acordo com os referidos graus de liberdade do dado elemento, mantêm-se os demais iguais a um valor nulo. Este procedimento descrito, então, gera a matriz de rigidez de elemento como resultado, de acordo com Soriano e Lima (1993).

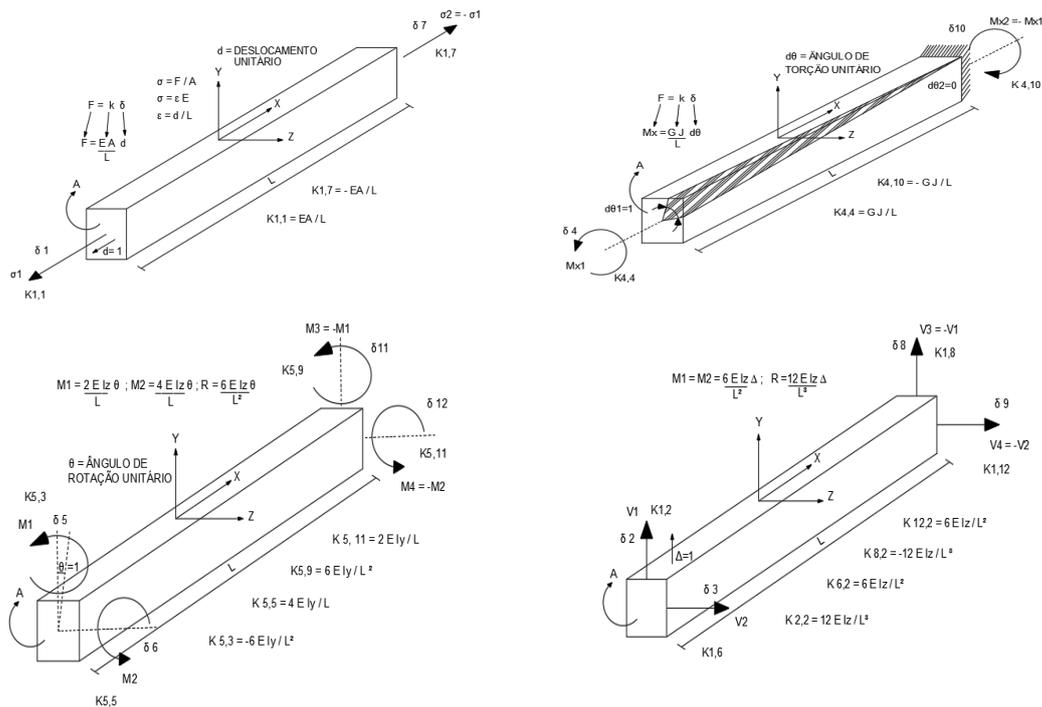
Sabendo que a rigidez axial ocorre perante a atuação de forças normais, o elemento de barra pode transmitir forças axiais que podem ser de compressão ou tração, como visto na Figura 1 em sua região superior esquerda. Por sua vez, a força axial distribuída igualmente sobre a área da seção transversal (A) da barra gera a tensão axial (normal) que é igual ao quociente da força axial pela área da seção transversal, podendo também ser evidenciada pelo produto do módulo de elasticidade (E) e a deformação linear média (ϵ). Sabendo que a deformação linear média é equivalente à variação do comprimento pelo comprimento original do corpo, a formulação da rigidez elástica em um elemento de barra decorrente de esforços axiais é obtida por meio da expressão resultante entre as relações de tensão axial e deformação linear média. Desse modo, sendo comparados com a lei de Hook, onde, impondo um deslocamento unitário em um dos nós e impedindo o restante, chega-se à conclusão que a constante elástica ou rigidez de tensões axiais é constante para um elemento de barra, sendo essa constante igual ao produto da área pelo módulo de elasticidade dividida pelo comprimento do elemento de barra. Portanto, os coeficientes de rigidez consequentes das cargas axiais dependem apenas destes três parâmetros (ALVES FILHO, 2000).

A rigidez à torção ocorre na presença da atuação do momento torçor. Seguindo a hipótese de resistência dos materiais, a torção de Saint-Venant é fundamentada pela equação que descreve que o momento torçor é equivalente ao produto de três fatores sendo estes: (1) o módulo de elasticidade ao cisalhamento pelo (2) momento de inércia polar e o ângulo de torção, dividido pelo (3) comprimento do elemento de barra. Para se obter os coeficientes de rigidez decorrentes dos esforços de torção em um elemento de barra, se considera um ângulo de rotação como sendo unitário em uma das extremidades da mesma, e na outra impõe um engaste – conforme foi apresentado na Figura 1, no canto superior direito –, impedindo, assim, a rotação e gerando os coeficientes de rigidez decorrentes da torção no elemento de barra. Nos coeficientes de rigidez relativos à torção, estão presentes as características geométricas e do material necessários para compreensão dos esforços de torção atuantes (ALVES FILHO, 2000).

A rigidez à flexão decorre da atuação de momentos fletores atuantes nos planos e as relações sugeridas na Figura 1, localizadas na parte inferior esquerda, são conhecidas enquanto resistência dos materiais e foram utilizadas para determinação dos coeficientes de rigidez do elemento. A formulação para se obter os coeficientes de rigidez advinda da flexão se baseia na imposição de uma rotação unitária em um dos graus de liberdade referente à flexão, sendo mantidos todos os demais graus de liberdade impedidos. As forças que surgem nos graus de liberdade são os próprios coeficientes de rigidez procurados, considerando a convenção de sinais para os sentidos convencionados positivos das forças e de deslocamento nodais. Deve-se, então, atentar que o coeficiente de grau K_{ij} da matriz de rigidez da barra possui uma força no grau de liberdade i devido ao deslocamento unitário imposto no grau de liberdade j , enquanto todos os demais graus de liberdade permanecem bloqueados. Assim, o processo deve ser repetido para os demais graus de liberdade relativos à flexão, e só então são obtidos todos os coeficientes relativos à flexão no elemento de barra no espaço (ALVES FILHO, 2000).

De modo similar aos demais esforços analisados anteriormente, que geraram seus respectivos componentes de rigidez para o esforço cortante, considera-se que o processo foi semelhante, como exemplificado na Figura 1, localizado na região inferior direita. Ainda, levando-se em consideração as equações de resistência dos materiais, impondo que um deslocamento unitário referente ao cortante e impedindo todos os demais, é possível obter a rigidez relativa a todos os graus de liberdade; além do processo ser repetido em todos os graus relativos ao esforço cortante, até que se obtenham todos os coeficientes de rigidez concernente ao mesmo (ALVES FILHO, 2000).

Figura 1 – Demonstração da determinação dos coeficientes de rigidez referentes aos esforços seccionais e transversais



Fonte: Autor, 2020.

Após ser determinada a rigidez decorrente de cada esforço seccional e transversal, foi montada a matriz de rigidez da estrutura no sistema de coordenadas locais, que contempla todos os componentes de rigidez correspondentes aos esforços.

De tal forma, se pode tratar da formulação da rigidez do elemento de barra por meio do estudo de quatro fenômenos independentes entre si, mas que estarão associados às parcelas de rigidez que o elemento possui: rigidez axial, rigidez à torção, rigidez ao cortante e flexão nos planos xz e xy. Ou seja, estudando cada uma destas características do elemento e tendo em vista que são independentes, traduz-se enquanto comportamentos isolados.

Assim, a união de todas as propriedades de rigidez em uma única matriz contabilizará o efeito de doze componentes de forças e também doze componentes de deslocamentos do elemento de barra, tendo dimensão doze. Em outras palavras, serão doze graus de liberdade. Por fim, a Figura 2 a seguir mostra a matriz de rigidez do elemento de barra no espaço no sistema de coordenadas locais.

Figura 2 – Matriz de rigidez do elemento de barra tridimensional nas coordenadas locais

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Fonte: RIBEIRO, 2014.

2.2 Formulação da matriz de rotação do elemento

Após a determinação da matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas locais, o mesmo deve ser rotacionado para conversão da matriz de rigidez local para o sistema de eixos globais. Para isso, faz-se necessário determinar a matriz de rotação do elemento local para global, sendo a mesma dependente das coordenadas em cada nó nas extremidades do elemento de barra tridimensional (x, y, z).

$$u = (X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1) \quad (1)$$

O sistema de eixo da barra é determinado a partir da diferença das coordenadas do sistema cartesiano tridimensional dos nós, localizados nas extremidades da barra.

Caso o eixo longitudinal da barra se encontre na posição vertical, a condicional referente aos valores dos demais vetores unitários será atendida; ocasionando, assim, a ocorrência dos três eixos da barra para as coordenadas locais coincidirem com os eixos globais.

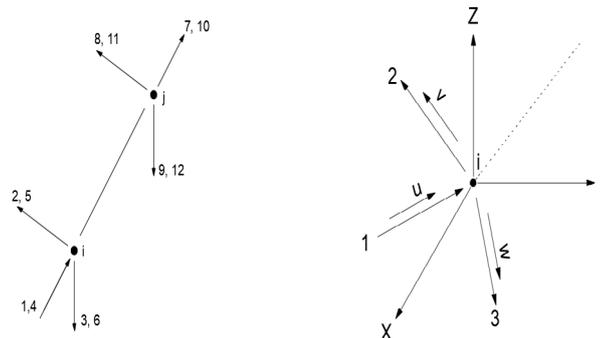
$$Seu = (0,0,1), Então v = (1,0,0), w = (0,1,0) \quad (2)$$

Caso o eixo da barra esteja orientado no sentido negativo da mesma, tal que Z_1 seja maior que Z_2 :

$$Seu = (0,0,-1), Então v = (1,0,0), w = (0,1,0) \quad (3)$$

Para se obter a matriz de rotação de eixos nas coordenadas locais para globais, deve-se realizar a decomposição, como mostrado na Figura 3 a seguir, do sistema local (x, y, z) para o global (u, v, w).

Figura 3 – Decomposição dos eixos para determinar matriz de rotação



Fonte: Autor, 2020.

$$F_x^i = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_1 u_x + F_2 v_x + F_3 w_x \quad (4)$$

$$F_y^i = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = F_1 u_y + F_2 v_y + F_3 w_y \quad (5)$$

$$F_z^i = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = F_1 u_z + F_2 v_z + F_3 w_z \quad (6)$$

$$M_x^i = M_{4x} + M_{5x} + M_{6x} = M_4 u_x + M_5 v_x + M_6 w_x \quad (7)$$

$$M_y^i = M_{4y} + M_{5y} + M_{6y} = M_4 u_y + M_5 v_y + M_6 w_y \quad (8)$$

$$M_z^i = M_{4z} + M_{5z} + M_{6z} = M_4 u_z + M_5 v_z + M_6 w_z \quad (9)$$

A rotação de eixos pelo caminho inverso, partindo das coordenadas globais para locais, pode ser realizada se a partir da mesma linha de raciocínio, entretanto, a partir do caminho inverso comprova-se que a inversa da matriz de rotação é igual a sua transposta. Assim, a decomposição parte do sistema (u, v, w) para (x, y, z), como pode ser observada nas equações a seguir, obtendo-se a matriz de rotação de ordem doze na transformação do sistema.

$$\vec{F}_e^i = \vec{F}_G^i = (F_x^i, F_y^i, F_z^i)_{xyz}^T \quad (10)$$

$$1 - F_u^i = F_x^i u_x + F_y^i u_y + F_z^i u_z \quad (11)$$

$$2 - F_v^i = F_x^i v_x + F_y^i v_y + F_z^i v_z \quad (12)$$

$$3 - F_w^i = F_x^i w_x + F_y^i w_y + F_z^i w_z \quad (13)$$

$$4 - M_u^i = M_x^i u_x + M_y^i u_y + M_z^i u_z \quad (14)$$

⋮

$$12 - M_u^j = M_x^j w_x + M_y^j w_y + M_z^j w_z \quad (15)$$

Com isso, tem-se:

$$[r] = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para determinar os componentes do vetor \vec{u} , a partir das coordenadas nas duas extremidades da barra, inicialmente faz-se necessário determinar o seu módulo (norma). Desse modo, por meio da divisão de cada componente do vetor unitário do eixo da barra pelo módulo, chega-se aos componentes do vetor \vec{u} , que é o eixo longitudinal do elemento de barra:

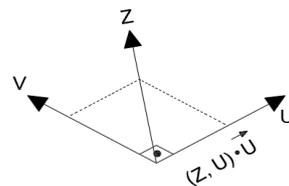
$$l_x = x_2 - x_1, l_y = y_2 - y_1, l_z = z_2 - z_1 \quad (17)$$

$$\|lu\| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} \quad (18)$$

$$u_x = \frac{l_x}{\|lu\|}, u_y = \frac{l_y}{\|lu\|}, u_z = \frac{l_z}{\|lu\|} \quad (19)$$

Para determinar os componentes do vetor \vec{v} , que representa a vertical da seção transversal do elemento de barra, caso o eixo longitudinal da barra não esteja na vertical, a determinação do vetor \vec{v} é realizada por meio do processo de ortogonalização; assim, por meio do vetor \vec{u} e do eixo Z, é possível encontrar um vetor no plano UZ que seja ortogonal a \vec{u} , o processo de cálculo para a determinação e demonstrado na sequência, onde é possível observar na Figura 4 a seguir.

Figura 4 – Determinação do vetor .



Fonte: Autor, 2020.

$$\vec{v} = \vec{z} - (z, u)\vec{u} \quad (20)$$

$$\vec{z} = (0,0,1), \vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad (21)$$

A projeção do eixo Z sobre o eixo U resulta em um escalar:

$$(z, u) = z_x u_x + z_y u_y + z_z u_z = c \quad (22)$$

Do resultado do escalar, tem-se:

$$(z, u)\vec{u} = (cu_x, cu_y, cu_z) \tag{23}$$

$$\vec{v} = (0,0,1) - (cu_x, cu_y, c^2) \tag{24}$$

$$\vec{v} = (-cu_x, -cu_y, 1 - c^2) \tag{25}$$

$$\|lv\| = \sqrt{(-cu_x)^2 + (-cu_y)^2 + (1 - c^2)^2} \tag{26}$$

Resultando em:

$$vx = \frac{-cu_x}{\|lv\|}, vy = \frac{-cu_y}{\|lv\|}, vz = \frac{1 - c^2}{\|lv\|} \tag{27}$$

Para determinar os componentes do vetor \vec{w} , faz-se necessário realizar o produto vetorial dos vetores \vec{u} por \vec{v} ($\vec{u} \wedge \vec{v}$) tomados nesta ordem e conforme esquematizado na equação 28. Assim, tal qual o resultado do determinante da matriz de ordem três, em seus componentes (i, j, k) são os respectivos componentes (x, y, z) do vetor \vec{w} , que representa a horizontal da seção transversal do elemento de barra.

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ i & j & k \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$w_x = u_y v_z - u_z v_y, w_y = u_z v_x - u_x v_z, w_z = u_x v_y - u_y v_x \tag{29}$$

A partir da determinação dos componentes não nulos da matriz de rotação é possível realizar sua montagem; que gera uma matriz também de ordem doze, podendo esta ser escrita de forma mais sucinta como uma associação de dezesseis matrizes de ordem três, distribuídas em quatro fileiras horizontais e verticais, conforme apresentado na equação 30.

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [r] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [r] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [r] \end{bmatrix} \tag{30}$$

De modo que a matriz de rotação expandida é equivalente:

$$[R] \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & v_x & w_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_y & v_y & w_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_z & v_z & w_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & v_x & w_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_y & v_y & w_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_z & v_z & w_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & v_x & w_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_y & v_y & w_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \tag{31}$$

Assim, realizou-se a averiguação para constar se os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , e são unitários, conforme esquematizado nas equações 32, 33 e 34.

$$U_u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \tag{32}$$

$$U_v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{33}$$

$$U_w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \tag{34}$$

Em sequência, realizou-se a verificação para constar se os vetores , e são ortogonais entre si e tomados dois a dois, como mostrados na sequência com as equações 35, 36 e 37.

$$O_{uv} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (35)$$

$$O_{uw} = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z \quad (36)$$

$$O_{vw} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \quad (37)$$

2.3 Sistema de coordenadas globais

É de grande relevância salientar que cada matriz de rigidez do elemento é construída tomando-se como base o seu próprio sistema de coordenadas, ou seja, o sistema de coordenadas locais. No entanto, faz-se necessário transformar o sistema de eixos local para o global, tendo em vista que não será apenas um elemento analisado, mas sim toda a estrutura da qual todos os elementos fazem parte. O sistema de coordenadas locais tem como referência os eixos principais do modelo estrutural.

Em cada elemento:

$$[F]_{local} [K]_{local} [\delta]_{local} \quad (38)$$

De modo que:

$$[F]_{global} [R]_{L \rightarrow G} [F]_{local} \quad (39)$$

Levando em consideração:

$$[\delta]_{local} [R]_{G \rightarrow L} [\delta]_{global} \quad (40)$$

Que também pode ser reescrito como:

$$[\delta]_{local} = [R]^T [\delta]_{global} \quad (41)$$

Sabendo que a matriz de rotação é ortogonal:

$$[R]_{G \rightarrow L} = [R]^T \quad (42)$$

Realizando a substituição da equação 38 na equação 39:

$$[F]_{global} [R]_{L \rightarrow G} [K]_{local} [\delta]_{local} \quad (43)$$

Substituindo a equação 41 na equação 43:

$$[F]_{global} [R]_{L \rightarrow G} [K]_{local} [R]_{L \rightarrow G}^T [\delta]_{global} \quad (44)$$

Tal que:

$$[F]_{global} [K]_{global} [\delta]_{global} \quad (45)$$

Chega-se à conclusão que:

$$[K]_{global} [R]_{L \rightarrow G} [K]_{local} [R]_{L \rightarrow G}^T \quad (46)$$

Sendo assim, para se determinar a matriz de rigidez nas coordenadas globais é necessário realizar a multiplicação da matriz de rotação, pela matriz de rigidez nas coordenadas locais, pela transposta da matriz de rotação, como apresentado na equação 46 seguindo esta mesma ordem, tendo em vista que as matrizes não possuem a propriedade comutativa.

2.4 Montagem da matriz de rigidez da estrutura

Possuindo a matriz de rigidez nas coordenadas globais de um único elemento de barra tridimensional, todo o procedimento deve também ser realizado para todos os demais elementos, tendo em vista que, uma estrutura (pórtico) possui mais que um único elemento de barra. Somente então, com todas as matrizes de

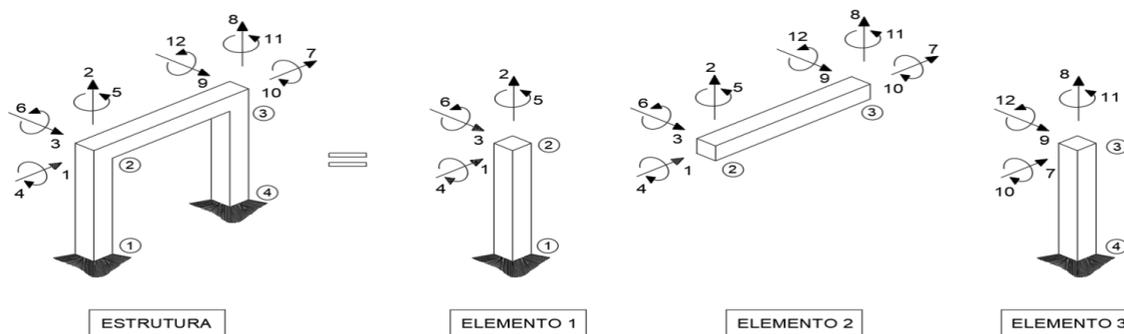
rigidez globais dos elementos constituintes do pórtico, deve-se condensar todas estas em uma única matriz de rigidez, que será declarada como sendo a matriz de rigidez global da estrutura. Entretanto, ressalta-se que esta justaposição das matrizes dos elementos para gerar a matriz da estrutura não ocorre simplesmente pela soma dos índices comuns das matrizes de cada elemento, nem tampouco a matriz de rigidez da estrutura terá ordem exatamente igual às matrizes dos elementos. Esta determinação, então, advém do processo de mapeamento da estrutura.

Inicialmente para determinar o grau de liberdade (GL) da estrutura, o pórtico tem todos os seus graus de liberdade numerados sequencialmente em cada um dos seus nós, desconsiderando-se apenas os graus que estão impedidos (bloqueados), tal como pelos apoios ou travamentos quaisquer ao longo da estrutura. O procedimento para se obter a matriz da estrutura se dá por intermédio do mapeamento da mesma – por via de seus elementos, nós e graus de liberdade –; em que os elementos de barra têm seus graus de liberdade não impedidos contabilizados no formato sequencial e a partir do sistema global, ou seja, a sua respectiva posição na estrutura. A partir disso, é realizado o emparelhamento dos valores de cada elemento a partir da sua posição na estrutura (sistema global) e também do elemento de barra de forma isolada (sistema local). Por conseguinte, cada coeficiente da matriz do elemento é locado na respectiva posição da matriz de rigidez da estrutura, respeitando-se as limitações da matriz. Deve se atentar que em alguns casos existe a superposição de valores, portanto é necessário somar os coeficientes da matriz de rigidez dos elementos que possuem os índices comuns na matriz de rigidez da estrutura.

O procedimento de mapeamento da estrutura pode ser observado na Figura 5 a seguir, onde foi apresentado tal mecanismo para um pórtico composto por três elementos de barra, a título de exemplificação. Inicialmente foram contabilizados todos os graus de liberdade da estrutura tidos como livres, em que, na ocasião, são unicamente aqueles que se encontram nos nós de número dois e três, tendo em vista que os nós um e quatro se encontram engastados, determinando, assim, a ordem da matriz da estrutura igual a doze.

Partindo para o mapeamento dos elementos constituintes no sistema global, no primeiro elemento de barra foram contabilizados unicamente os graus de liberdade do segundo nó, enquanto a segunda barra teve todos os seus graus de liberdade contabilizados em seus nós dois e três. Por fim, no último elemento de barra, foram contabilizados unicamente os graus de liberdade pertencentes ao nó de número três. Após a coleta de dados do mapeamento, os valores obtidos em todos os elementos no sistema global foram emparelhados com os valores do elemento local, que é tido como um elemento de barra isolado sem nenhuma restrição em seus graus de liberdade com todos os seus graus contabilizados. Desse modo, é possível identificar os índices (linha, coluna) dos elementos da diagonal principal da matriz do elemento que passará a ocupar a posição dos índices da matriz da estrutura.

Figura 5 – Esquemática do procedimento de mapeamento da estrutura



Fonte: Autor, 2020.

2.5 Determinação dos deslocamentos nodais da estrutura

Para se obter a matriz dos deslocamentos nodais na estrutura decorrente das forças aplicadas na mesma, resolve-se a equação 47 a seguir, que descobre os deslocamentos da estrutura. Vale ressaltar que, por se tratar de um sistema matricial e não unicamente uma equação linear, se faz necessário utilizar de métodos de

resolução de sistemas de equações lineares para resolução da equação 47, que para tal utilizou-se o método de Cholesky.

$$[F^{est}]_G = [K|est]_G[\delta|est]_G \quad (47)$$

2.5.1 Método de Cholesky

A decomposição ou fatoração de Cholesky é uma metodologia para fatoração de sistemas lineares de ordem $(n \times n)$, ou seja, uma matriz quadrada à qual a matriz do sistema seja simétrica e tida como positiva. Ou seja, esta metodologia consiste em realizar a fatoração de uma dada matriz A , em que os coeficientes do sistema são fatorados através do produto da matriz triangular inferior, tida como L por sua matriz adjunta L' , sendo iguais à própria matriz A . Sendo assim, determinados os coeficientes da matriz, são reduzidos, de modo satisfatório, as manipulações algébricas em relação a outras metodologias de fatoração (THIBES, 2002).

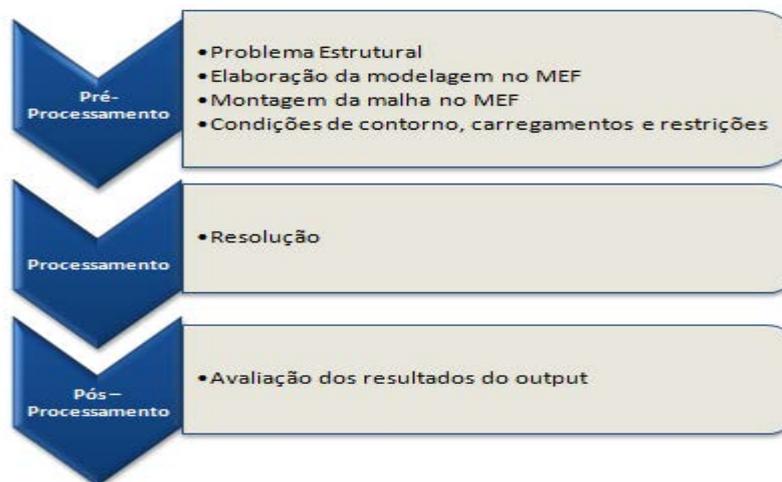
2.6 Determinação das reações da estrutura

As reações da estrutura são responsáveis pelo vínculo entre a estrutura e qualquer elemento de travamento, de modo a assegurar sua estabilidade; bem como a determinação das reações da estrutura é obtida pela multiplicação da matriz de rigidez do elemento nas coordenadas globais pelo deslocamento do elemento (também) nas coordenadas globais.

2.7 Etapas de processamento

A linha de raciocínio do funcionamento do programa foi subdividida em três grandes fases, sendo estas: o pré-processamento, o processamento e o pós-processamento (MARÔCO, 2010). As três etapas e os seus respectivos degraus para a análise do método dos elementos finitos aliados à programação podem ser observados na Figura 6, na sequência.

Figura 6 – Etapas de processamento



Fonte: Autor, 2020.

Percebe-se, então, que a primeira etapa se preocupa em modelar o modelo da estrutura discretizada, criando condições de contorno que o mesmo terá de obedecer, lançando todos os dados referentes à estrutura – carregamentos, propriedades (material, geometria), quantidade de nós e elementos, tipo de apoios. Já na fase de processamento, a única tarefa se resume em realizar, de forma sucinta, a montagem dos sistemas e resolução, tendo todo o processamento de dados feito de forma automatizada. Por fim, o pós-processamento é a etapa que envolve análise e a interpretação dos resultados numéricos obtidos na etapa anterior (MARÔCO, 2010).

Desse modo, os *softwares* computacionais são classificados de acordo com a destinação dada nas etapas de elaboração do projeto estrutural, podendo, assim, seguir cada qual uma das seguintes tipologias que se dividem em quatro, sendo estas: *softwares* de desenho, *softwares* de dimensionamento/verificação de elemento sozinho, *softwares* de sistema integrado que abrange todas as fases do projeto, e, por fim, *softwares* de análise,

que calculam os deslocamentos, tensões e esforços de uma estrutura, sendo este o tipo desenvolvido e usado no presente estudo (KIMURA, 2018).

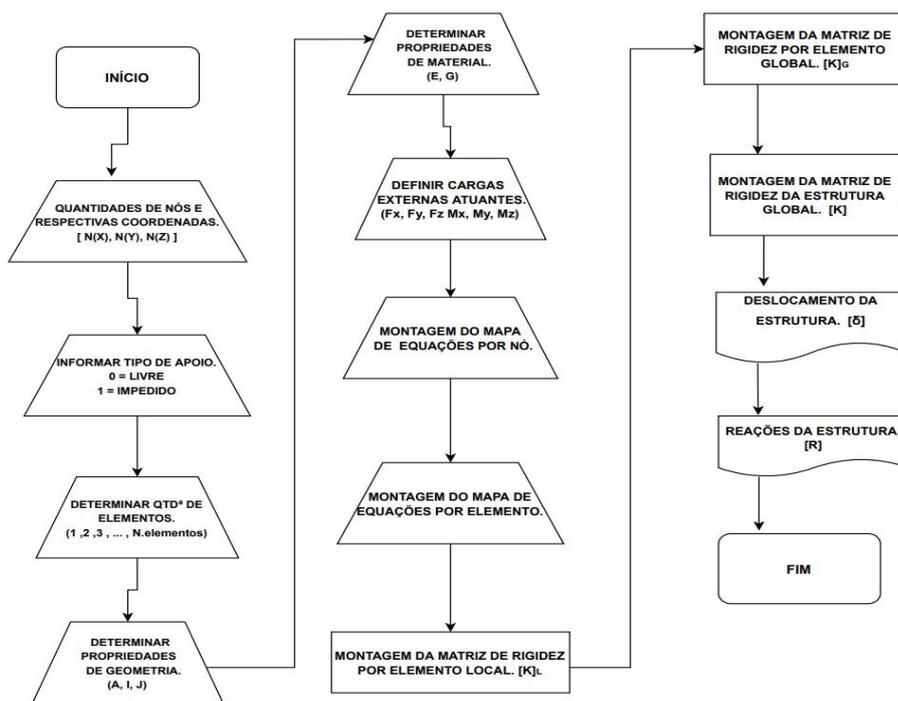
2.7.1 Rotina do algoritmo

Como todo programa que exige a necessidade da entrada de dados, esta tarefa é realizada por meio de um arquivo de texto no formato *txt*, de modo a facilitar a realização da inserção dos dados que, convencionalmente, era realizada no *prompt* de comandos do compilador. Desse modo, o código solicita a inserção da quantidade de nós e as suas respectivas coordenadas (x, y, z), o que, posteriormente, informa-se o tipo de apoio e sua respectiva posição, sendo considerado o algarismo “0” para apoio livre e o algarismo “1” para apoio impedido, considerando os seis graus de liberdade do nó em questão. Também é necessário determinar a quantidade de elementos e associar ao mesmo os nós de início e fim, vinculando também ao elemento as propriedades físicas de material (módulo de elasticidade, elasticidade ao cisalhamento) e geométricas (área, inércia no eixo yy, inércia no eixo zz, comprimento, momento polar de inércia).

Para dar partida ao cálculo da montagem das matrizes de rigidez por elemento em coordenadas locais, todos os elementos iniciados por “0” apresenta os valores diferentes de nulo (calculados de forma independente e sequencial), sendo montados, em seguida, na matriz em questão. Assim, faz-se necessário transformar a matriz de rigidez por elemento, inicialmente determinada nas coordenadas locais para as coordenadas globais, verificando, então, em qual dos casos de ortogonalidade o elemento se encontra. Feito isso, é realizada a montagem da matriz de rigidez do elemento global enquanto resultado da multiplicação da matriz de rotação pela matriz de rigidez local e pela transposta da matriz de rotação. Em sequência, é realizada a montagem da matriz da estrutura global, por meio do mapeamento dos nós e elementos dos coeficientes das matrizes de rigidez inseridos na matriz de rigidez da estrutura global. Por fim, são definidas as cargas externas juntamente com os nós em que tais forças são aplicadas. Por meio da equação constitutiva, onde deformação é igual à força sobre a rigidez, é possível determinar as deformações da estrutura, se utilizando da fatoração Cholesky, possível de ser solucionado apenas para sistemas simétricos. Assim, a partir das deformações da estrutura são calculadas as reações da estrutura.

O fluxograma da rotina de cálculo automatizada pelo programa desenvolvido em linguagem C pode ser observado de forma sucinta na Figura 7 (a seguir), onde foram destacadas as etapas de desenvolvimento, além das fases do processo de implementação do MEF do presente trabalho.

Figura 7 – Fluxograma (fluxo de execução da rotina)



Fonte: Autor, 2020.

3 Resultados

A atual seção do estudo se destina à realização de um modelo de pórtico, sendo apresentados os resultados obtidos no algoritmo PorticoFEM3D e comparando-os com o *software* Robot Structural Autodesk (RSA) para a mesma modelagem, constituindo o terceiro capítulo (seção em que foi solucionado um pórtico tridimensional).

A verificação dos *outputs* advindos da análise de uma estrutura por meio de uma simulação computacional desenvolvida para o âmbito acadêmico é imprescindível, tendo em vista que erros grosseiros podem estar sendo cometidos na rotina de cálculo; sendo necessário avaliar nos seus resultados, além da ordem de grandeza e sinais dos deslocamentos e esforços, a precisão destes valores a partir de algum *software* de referência previamente já validado.

A convenção de sinais adotada para os diferentes esforços atuantes foi dada da seguinte forma: nos esforços axiais considerou-se o valor como sendo positivo quando tal força, independente do sentido, tende a tracionar o elemento e negativo quando tende a comprimir o mesmo. Referente às solicitações advindas do momento de torção, o sinal positivo é considerado somente quando o vetor resultante do momento tem o sentido da normal externa até a seção transversal atuante, enquanto que o sinal é negativo quando o vetor resultante do momento tem sentido contrário ao da normal externa até a seção transversal. Já para os esforços cortantes, convencionou-se o sinal positivo quando tal esforço atua no sentido horário no trecho do elemento, e o sinal negativo quando o esforço atua no sentido anti-horário no trecho do elemento. Por fim, a convenção para a solicitação do momento fletor foi do seguinte modo: adotou-se sinal positivo quando as fibras inferiores do elemento de barra são tracionadas, enquanto o sinal negativo ocorre quando as fibras tracionadas são as superiores (LINDENBERG NETO, 1997). Ressalta-se que a convenção de sinais do predeterminadas no Robot Structural Autodesk é a mesma.

3.1 Modelo de pórtico tridimensional

Para fins de modelagem segue a descrição do exemplo realizado para validação do algoritmo. Foi esquematizado um arranjo estrutural composto por elementos de barra dispostos de modo a simular um pavimento simples. Foram posicionados quatro elementos na vertical, estando todos engastados na cota inferior, representando os pilares que possuíam três metros de comprimento linear. Assim, tais elementos descritos se encontram igualmente afastados entre si com uma distância de cinco metros, de modo a formar o polígono regular quadrangular. O mesmo arranjo possuía quatro elementos de barras na horizontal apoiados sobre os elementos anteriores, simbolizando as vigas e constituindo uma estrutura de pórtico tridimensional. Abaixo, no Quadro 1, são apresentados os dados para a montagem do arranjo esquemático da estrutura de pórtico, onde é possível obter as informações referentes às coordenadas (x, y, z) em cada um dos nós do pórtico, bem como a vinculação dos graus de liberdade referente aos nós em questão, podendo todos os nós ter graus de liberdade livres, vinculados ou ambos os casos.

Quadro 1 – Montagem do arranjo estrutural do 3º modelo – pórtico tridimensional

COORDENADAS			Nó	GL		COORDENADAS			Nó	GL	
X	Y	Z		Livre	Vínculo	X	Y	Z		Livre	Vínculo
0	-3	0	1	6	0	-5	-3	0	2	6	0
-5	0	0	3	0	6	-5	-3	5	4	6	0
-5	0	5	5	0	6	0	-3	5	6	6	0
0	0	5	7	0	6	0	0	0	8	0	6

Fonte: Autor, 2020.

Relativo às propriedades geométricas da seção transversal dos elementos de barra constituintes de pórtico, foi convencionada uma seção circular de diâmetro igual a 45cm para todos os elementos de barra pertencentes ao modelo estrutural, resultando, assim, em uma área de seção transversal igual a $1,59043 \times 10^{-1} \text{ m}^2$; possuindo uma inércia igual de $2,012896 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ nos dois eixos, que resulta em uma inércia polar igual a $4,0257792 \times 10^{-3} \text{ m}^4$.

As propriedades estipuladas de material também foram padronizadas para todos os elementos de barra, sendo o módulo de elasticidade igual a 38 Gpa. Na determinação da elasticidade transversal, em que para as

tensões de compressão inferiores a $0,5f_c$ ou menores que f_{ct} para o caso de tração, se considera o coeficiente de Poisson (ν) igual ao valor de 0,2 na equação 48; podendo também realizar a aproximação observada na equação 49, caso seja atendida as condicionantes informadas segundo as prescrições da NBR 6118:2019.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{48}$$

$$G = 0,4E \tag{49}$$

Logo, a elasticidade ao cisalhamento foi igual a 15,2 Gpa, considerando a equação 49. Os dados referentes às características geométricas e de material do pórtico tridimensional do exemplo podem ser observadas no Quadro 2, adiante.

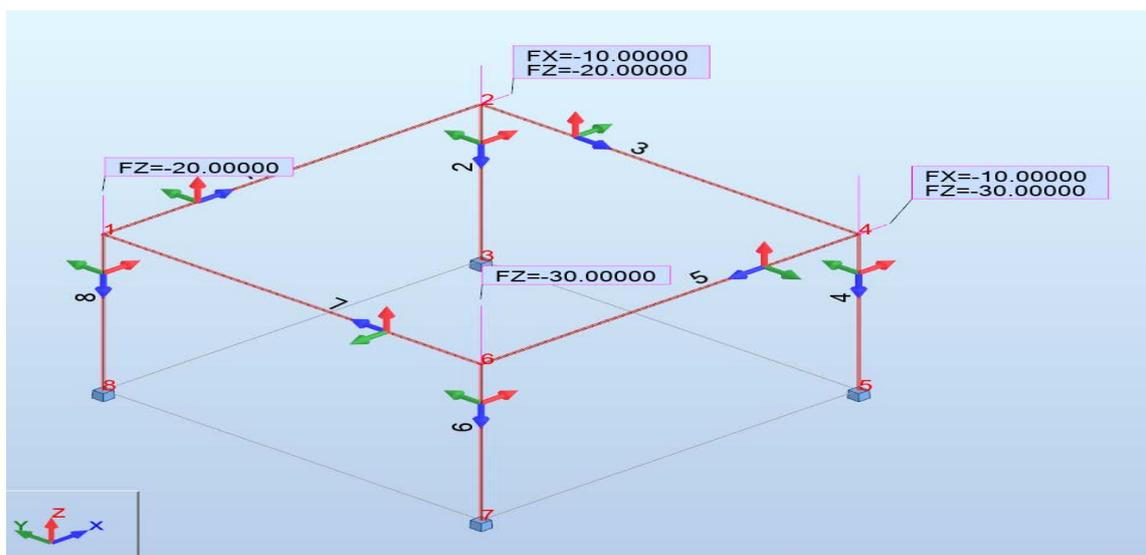
Quadro 2 – Caracterização das propriedades geométricas e de material com sua respectiva locação nos elementos do pórtico tridimensional (3° Modelo)

POSIÇÃO / COORDENADAS			PROPRIEDADES GEOMETRICAS					PROP. MATERIAL	
Nó. inicial	Nó. final	Elemento	L (m)	A (m ²)	I _y (m ⁴)	I _z (m ⁴)	J (m ⁴)	E(Gpa)	G(Gpa)
1	2	1	5	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2
2	3	2	3	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2
2	4	3	5	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2
4	5	4	3	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2
4	6	5	5	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2
6	7	6	3	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2
6	1	7	5	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2
1	8	8	3	1,59x10 ⁻¹	2,013x10 ⁻³	2,013x10 ⁻³	4,025x10 ⁻³	38	15,2

Fonte: Autor, 2020.

Por fim, para finalizar completamente a caracterização da estrutura de pórtico tridimensional a ser analisada, necessita-se informar o tipo de carregamento, local de atuação e sua intensidade. Desse modo, foram aplicadas cargas pontuais no valor de -20 KN nos nós um e dois, enquanto para os nós quatro e seis foi empregada a carga nodal de -30 KN; tal que as cargas que atuam nos quatros nós citados, agem no sentido negativo do eixo Z, mais especificamente no grau de liberdade de número dois. Também foi inserida a carga pontual no valor de -10 KN nos nós dois e quatro no sentido negativo do eixo X, representado pelo grau de liberdade um. O problema, há pouco descrito, pode ser visto conforme modelagem desenvolvida no Robot na Figura 8.

Figura 8 – Modelagem do pórtico tridimensional no software RSA (3° Modelo)



Fonte: Autor, 2020.

3.2 Comparação de resultados obtidos

Após a realização da modelagem e do processamento de dados, dando início a apresentação e comparação dos resultados, a partir do modelo implementado, após o processamento da estrutura nos *softwares* PorticoFEM3D e RSA. Foram coletados os *outputs* em ambos os programas e comparados. A seguir, os resultados dos deslocamentos da estrutura são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Comparação dos resultados dos deslocamentos na estrutura (3° Modelo)

PorticoFEM3D						
Id(No)	D _x (m)	D _y (m)	D _z (m)	R _x (rad)	R _y (rad)	R _z (rad)
1	-2,4149x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-1,1095x10 ⁻⁵	7,7573x10 ⁻⁷	-6,3521x10 ⁻⁵	4,0714x10 ⁻²⁰
2	-2,4560x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-8,7681x10 ⁻⁶	7,7573x10 ⁻⁷	-6,5102x10 ⁻⁵	3,3743x10 ⁻²⁰
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	-2,4560x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-1,3724x10 ⁻⁵	7,7573x10 ⁻⁷	-6,5102x10 ⁻⁵	1,9747x10 ⁻²⁰
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6	-2,4149x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-1,6051x10 ⁻⁵	7,7573x10 ⁻⁷	-6,3521x10 ⁻⁵	4,0219x10 ⁻²⁰
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
RSA						
Id(No)	D _x (m)	D _y (m)	D _z (m)	R _x (rad)	R _y (rad)	R _z (rad)
1	-2,4149x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-1,1095x10 ⁻⁵	7,7573x10 ⁻⁷	-6,3521x10 ⁻⁵	5,5904x10 ⁻²⁰
2	-2,4560x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-8,7681x10 ⁻⁶	7,7573x10 ⁻⁷	-6,5102x10 ⁻⁵	7,1151x10 ⁻²⁰
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	-2,4560x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-1,3724x10 ⁻⁵	7,7573x10 ⁻⁷	-6,5102x10 ⁻⁵	5,7598x10 ⁻²⁰
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6	-2,4149x10 ⁻⁴	-1,1636x10 ⁻⁶	-1,6051x10 ⁻⁵	7,7573x10 ⁻⁷	-6,3521x10 ⁻⁵	4,7639x10 ⁻²⁰
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Fonte: Autor, 2020.

Por fim, finalizando a análise estrutural do pórtico sobre estudo, na Tabela 2 são exibidas as reações de apoio obtidas no PorticoFEM3D, que ocorreram unicamente para os nós que possuem um ou mais de seus graus de liberdade impedidos e que por sua vez se encontram na cota inferior dos elementos de barra localizados na posição vertical.

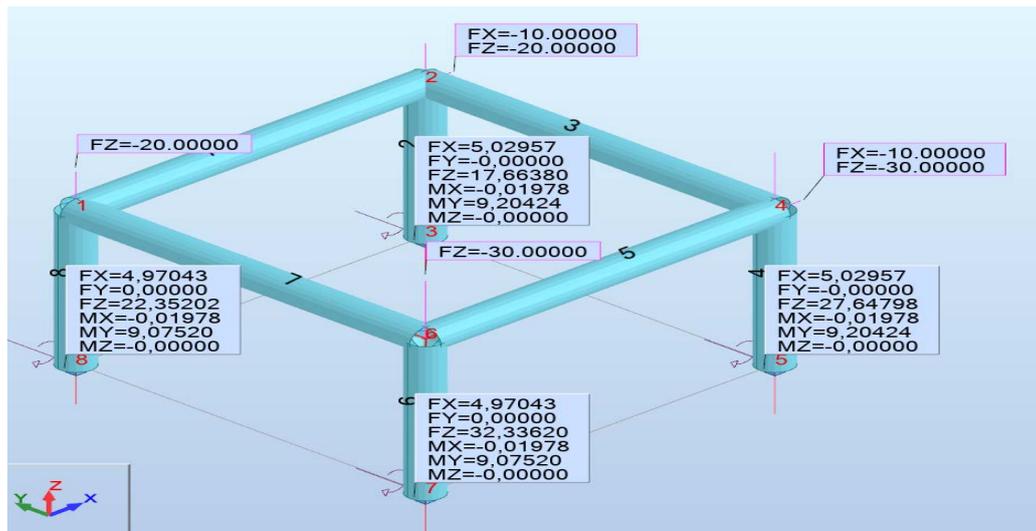
Tabela 2 – Resultados das reações de apoio na estrutura de pórtico tridimensional (3° Modelo)

PorticoFEM3D							
Elem	Id(No)	F _x (KN)	F _y (KN)	F _z (KN)	M _x (KNm)	M _y (KNm)	M _z (KNm)
2	3	5,0296	0,0	17,6638	-0,0198	9,2042	0,0
4	5	5,0296	0,0	27,6480	-0,0198	9,2042	0,0
6	7	4,9704	0,0	32,3362	-0,0198	9,0752	0,0
8	8	4,9704	0,0	22,3520	-0,0198	9,0752	0,0

Fonte: Autor, 2020.

As reações de apoio obtidos no *software* RSA também foram plotadas sobre o arranjo estrutural tridimensional e podem ser observadas na Figura 9, a seguir, onde é possível observar as respectivas reações de apoio em cada nó bloqueado pertencente aos elementos de barra na estrutura.

Figura 9 – Reações obtidas na modelagem do pórtico tridimensional no *software* RSA (3º Modelo)



Fonte: Autor, 2020.

4 Conclusão

No presente serão apresentadas as considerações finais referentes ao desenvolvimento do algoritmo, com discussão sobre os resultados obtidos para a modelagem realizada, além de propostas para implementações futuras. Para o modelo que se trata de um pórtico tridimensional, os resultados obtidos no PorticoFEM3D corresponderam aos valores observados no RSA, com uma igualdade até a quarta casa decimal após a vírgula, ou seja, a aproximação é definida pela capacidade de processamento dos *softwares*. Além de mostrar a validade e funcionalidade do algoritmo desenvolvido para realizar a modelagem e análise de pórticos tridimensionais quando submetidos unicamente a carregamentos pontuais nos nós pertencentes à estrutura. Ressalta-se, ainda, a necessidade e validade da ampliação para a implementação, além da validação para carregamentos distribuídos na estrutura de pórtico.

Como propostas para implementações em trabalhos futuros que, se utilizando da mesma temática, conduzam uma abordagem através do método dos elementos finitos em pórticos tridimensionais. Existem alguns pontos de implementações que foram tangenciados ao longo do estudo, mas que não chegaram a ser implementados, tais como: (1) a análise de uma estrutura de nós móveis, sendo necessário realizar uma consideração dos efeitos de segunda ordem; (2) bem como Considerar também a possibilidade de apoios elásticos lineares translacionais e rotacionais e o uso de rótulas; e, por fim, (3) considerar, além de cargas estáticas distribuídas, a aplicação de uma nova implementação para a possibilidade de atuação de cargas dinâmicas, que são uma realidade em muitas estruturas, de acordo com a sua finalidade.

Dentre os pontos que não foram sequer comentados ao longo do estudo, mas que seriam de grande relevância para implementações futuras, destaca-se a avaliação da construção incremental da edificação, tendo em vista que nenhum edifício é submetido ao carregamento que atuará sobre o mesmo em uma única etapa, mas sim como sendo um processo gradual, à medida que as etapas do processo construtivo vão sendo concluídas, ou melhor, os seus respectivos pavimentos. De forma similar, a resistência dos elementos estruturais de concreto armado não é a máxima logo de início, sendo válido ressaltar que o concreto possui um período de tempo de 28 dias até a obtenção da sua resistência máxima, de acordo com estudos da ciência dos materiais; além de ressaltar que um pórtico é constituído por elementos de pilar, viga e laje, sem este último ser implementado no programa ou sequer analisado, podendo, assim, ser computado em um estudo futuro de análise de lajes em elementos de grelha se utilizando do MEF. Por fim, e desta vez se voltando mais para questões que se relacionam ao desenvolvimento do programa, o mesmo não possui uma interface gráfica, sendo necessária sua implementação; além de se entender que a linguagem de programação C acaba não sendo a melhor opção para criar esta interface (*frontend*), sendo mais recomendado utilizar as linguagens de programação Python ou Java, que possuem um conjunto de bibliotecas e funções que facilitam tal implementação.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 6118 - **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

ALVES FILHO, A. **Elementos finitos**: A base da tecnologia CAE. 6. ed. São Paulo: Érica, 2000.

KIM, Nam-Ho; SANKAR, Bhavani. **Introdução à análise e ao projeto em elementos finitos**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

KIMURA, Alio. **Informática aplicada a estruturas de concreto armado**. São Paulo: Oficina de Textos, 2018.

MARÔCO, João. **Análise de equações estruturais**: fundamentos teóricos, software & aplicações. [S. l.]: ReportNumber, 2010.

MARTHA, Luiz. **Análise de estruturas**: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

LINDENBERG NETO, H. **Introdução à mecânica das estruturas**: capítulos 1 a 5. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1997.

SORIANO, Humberto L.; LIMA, Silvio S. **Análise de estruturas em computadores**: estruturas reticuladas. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993. (Série Cadernos Didáticos da UFRJ).

SORIANO, Humberto L.; LIMA, Silvio S. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: EdUSP, 2003. v. 48.

SUSSEKIND, José Carlos. **Curso de análise estrutural**: 1 - estruturas isostáticas. Rio de Janeiro: Globo, 1980.

THIBES, Hélia Valério; FACHIN, Maria Paula Goncalves; CUNHA, Rudnei Dias da. Fatoração incompleta LU e Cholesky como pré-condicionadores. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 25., 2002, Nova Friburgo. **Resumos** [...]. São Paulo: SBMAC, 2002.

TIMOSHENKO, Stephen. **História da resistência dos materiais**: com um breve relato da história da teoria da elasticidade e teoria das estruturas. [S. l.]: Courier Corporation, 1983.

RIBEIRO, Iara Souza et al. Análise linear elástica de pórticos espaciais. *In*: SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 11. Encontro Mineiro de Modelagem Computacional, 2. 2014, Juiz de Fora. Disponível em: https://www.ufjf.br/simmec-emmcomp-2014/files/2014/05/simmec-emmcomp-2014_submission_99.pdf. Acesso em: 05 de jan. 2021.

ZIENKIEWICZ, Olek C.; TAYLOR, Robert L.; ZHU, Jian Z. **The finite element method**: its basis and fundamentals. Boston: Elsevier, 2005.

Sobre os Autores

Bruno da Silva Sales

Mestrando em Engenharia Aeronáutica e Mecânica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) em 2021. Bacharel em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza (UNIFOR) em 2020. Possui experiência na área de estruturas, com ênfase no método dos elementos finitos.

Iuri Alves Ferreira

Doutorado em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2008). Atualmente é professor assistente da Universidade de Fortaleza. Mestrado em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1998). Graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Ceará (1995). Atualmente é professor assistente da Universidade de Fortaleza. Tem experiência na área de Engenharia Civil, com ênfase em Estruturas de Concreto, atuando principalmente nos seguintes temas: estruturas de concreto, concreto, cinética, sistemas estruturais e estruturas massivas de concreto.

Avaliado em: 24.10.2021

Aceito em: 01.12.2022