101
REVISTA
TECNOLOGIA
FORTALEZA
Nº 21
P. 101-105
DEZ. 2000

ANÁLISE DE VIGAS CONTÍNUAS VIA MNE

RESUMO:

A aplicação da análise estrutural via Mínima Norma Euclidiana é apresentada neste trabalho como alternativa à análise linear elástica.

Utilizando os softwares "Pale" e "Pmne", desenvolvido pelo prof. Ricardo Carvalho, em sua dissertação de mestrado na UnB, analisou-se exemplos de vigas contínuas através do método da rigidez analítica via Mínima Norma Euclidiana (MNE) e Análise Linear Elástica (ALE).

ABSTRACT:

The structural analisis with the use of Minimal Euclidian Method is presented in this work as an alternativ to the Elastic Linear Analisis.

Professor Ricardo Carvalho developed in the university of Brasilia, as part of his graduation thesis, two softwares: Pale and Pmne. We use them to analise examples of continous beams using the analitical rigidity method through the Minimal Euclidian Method and the Elastic Linear Analises.

Daniel de Almeida Ferreira

Aluno do Curso de Engenharia Civil (Unifor)
Monitor da disciplina Estruturas de Concreto II (Unifor)

Ricardo José Carvalho Silva

Engenheiro Civil (Unifor)
MSc Estruturas (UnB)
Professor CCT- (Unifor)

1. INTRODUÇÃO:

Em 1980, o prof. Eldon Londe Mello defendeu sua tese de PhD no Imperial College em Londres, aplicando a teoria da inversa generalizada para problemas estruturais. Assim, mostrou através da análise linear elástica, a partir de equações fundamentais que:

$$m = H.\lambda$$

onde:

$$H = K.L^T.(L.K.L^T)^{-1}$$

Eldon mostrou que H é a inversa generalizada de mínima norma da matriz de equilíbrio L, quando ela é retangular e é equivalente à solução m obtida através da programação quadrática. Chamando K = I, obtém-se uma solução de mínima norma euclidiana (MNE)

Com esta tese, Eldon Londe Mello, professor da universidade de Brasília, recebeu o prêmio de melhor tese de 1980 das mãos da rainha da Inglaterra.

Hoje, após vinte anos, tem-se como motivação aplicar a MNE na análise de vigas contínuas. Atualmente, na UnB, pesquisas nesta linha vêm sendo desenvolvidas.

2. A MÍNIMA NORMA EUCLIDIANA (MNE)

Para que fique claro o princípio de MNE, é importante e necessário fazer um estudo paralelo com a análise linear elástica.

Através do método da rigidez tem-se:

$\lambda = Lm$ (equação de equilíbrio)

$$\lambda = L.K.\theta$$
$$\lambda = L.K.(L^T.\delta)$$

assim:

$$\delta = (L.K.L^T)^{-1}.\lambda$$

como:

$$\theta = L^T.\delta$$

fica:

$$\theta = L^T(L.K.L^T)^{-1}.\lambda$$

mas:

$$m = K.\theta$$

logo, chega-se na expressão :

$$m = K.L^T(L.K.L^T)^{-1}.\lambda$$
$$m = H.\lambda$$

Já é sabido, a partir da introdução deste artigo que H representa uma inversa generalizada de mínima norma da matriz de equilíbrio L.

Assim, para estruturas isostáticas, onde a matriz L é quadrada, e admite inversa única L^{-1}, a matriz H é igual a L^{-1}, não dependendo de K (matriz de rigidez do elemento desconexo) para encontrar m. Logo,

$H = K.L^T(L^T)^{-1}K^{-1}L^{-1} = L^{-1}$ (inversa verdadeira)

Para estruturas hiperestáticas, onde a matriz L é retangular, sua inversa não é única, admitindo várias soluções. A inversa de uma matriz retangular (βx n) é outra matriz retangular de ordem (n xβ).

Assim, pré-multiplicando H por L, fica

$$L.H = L.K.L^T(L.K.L^T)^{-1}$$

Logo, se H fosse uma inversa única (inversa verdadeira) de L, como ocorre quando a estrutura é isostática, então:

$$H.L = I$$

Porém, no caso de estruturas hiperestáticas, H.L é uma matriz idempotente, satisfazendo a seguinte relação:

$$(H.L)^2 = H.L$$

Para identificar a norma envolvida na obtenção da solução dada por $m = K.L^T(L.K.L^T)^{-1}.\lambda$, recorre-se a programação matemática:

$$\boxed{\begin{array}{l} Min\ \tfrac{1}{2}\, m^T.F.m \\ Tal\ que\ L.m = \lambda \\ m - sem\ restrições \end{array}}$$

Onde F, a matriz de flexibilidade dos elementos desconexos, é a inversa de K.

A teoria da inversa generalizada de matrizes mostra que a solução da programação quadrática é equivalente a resolver $L.m = \lambda$ sob a norma $(m^T.F.m)^{1/2}$.

Se substituir a matriz F pela matriz identidade I, fica:

$$(m^T.I.m)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} m_i^2}$$

Que é a norma euclidiana do vetor m.

Mello denominou a norma $(m^T.F.m)^{1/2}$, onde o vetor m é ponderado pela matriz F, de norma elástica, para distinguir da norma euclidiana, onde o vetor m é ponderado pela matriz identidade I.

Entretanto, a solução obtida com a norma elástica (m_e) é, em geral, diferente da solução m obtida com a norma euclidiana (m_I) , como veremos na aplicação do exercício em seguida.

assim:

$$|m_e| \geq |m_f|$$

$m_e = m_f$ - estrutura isostática.
$m_e \geq m_f$ - estrutura hiperestática.

Logo, de todas as soluções possíveis m da relação de equilíbrio $\lambda = Lm$, a que conduz a um vetor de menor norma possível é a solução m_f de mínima norma euclidiana.

3 - APLICAÇÃO:

Utilizando os softwares Pale e Pmne, analisou-se uma viga contínua de grau de hiperestaticidade igual a 02, conforme apresentado na fig (1). A fig (2) mostra os diagramas dos momentos fletores via ALE e MNE. Para a fig (3)-a e fig (3)-b , é proposto o dimensionamento.

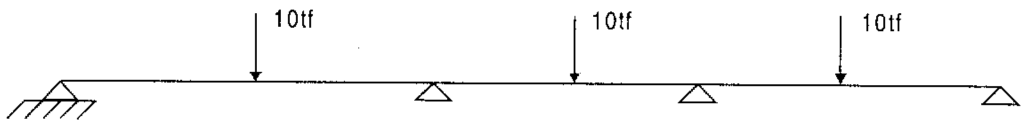


Figura 1

ALE

Momento fletor	m_i^2
0,000	0,000
11,08889	122,9634
11,08889	122,9634
-7,82221	61,1869
-7,82221	61,1869
2,92276	8,5425
2,92276	8,5425
-11,3323	128,4203
-11,3323	128,4203
14,33387	205,4598
14,33387	205,4598
0,000	0,000

Σ 1053,1463

MNE

Momento fletor	m_i^2
0,000	0,000
11,2143	125,7603
11,2143	125,7603
-7,5714	57,3265
-7,5714	57,3265
3,9285	15,4336
3,9285	15,4336
-9,5714	91,6122
-9,5714	91,6122
15,2143	231,4743
15,2143	231,4743
0,000	0,000

Σ 1043,2140

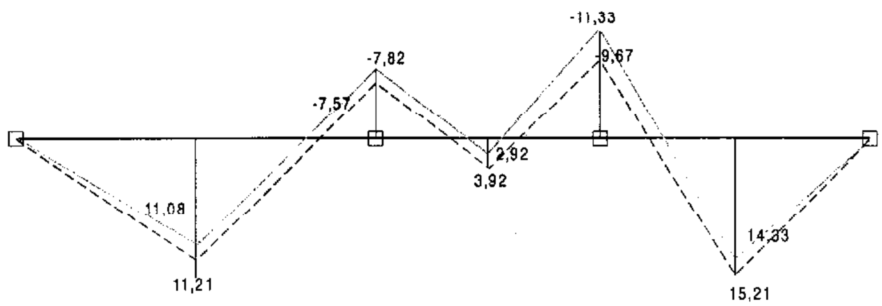
$$|m_e| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} m_i^2}$$

$$|m_e| = 32,4522$$

$$|m_f| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} m_i^2}$$

$$|m_f| = 32,2988$$

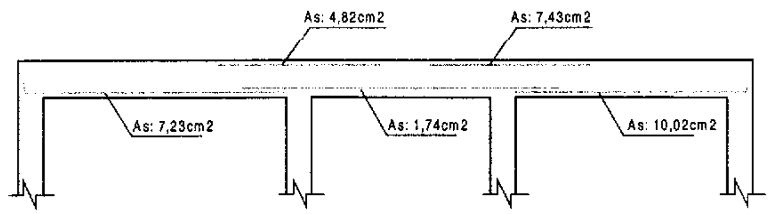
$$|m_e| > |m_f|$$



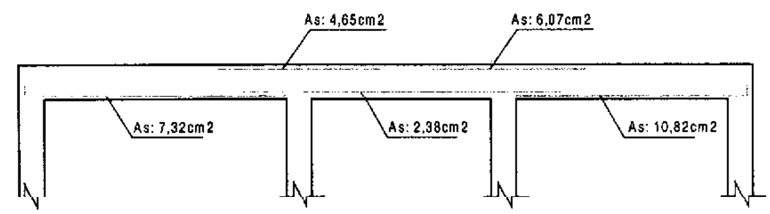
DMF - ALE;MNE

ALE - Linha Contínua
MNE - Linha Descontínua

Figura 2



(A) ALE



(A) MNE

Figura 3

4. CONCLUSÃO:

O Emprego da MNE como alternativa à ALE dá resultados satisfatórios, visto que a norma euclidiana (m_f) é menor que a norma elástica (m_e), caracterizando uma economia no dimensionamento de vigas contínuas, que tende a aumentar a medida que aumenta o grau de hiperestaticidade.

Outro ponto importante é visto no DMF da ALE e MNE [FIG. (2)], evidenciando uma redução nos momentos sobre os apoios, como recomenda a NBr-6118 no cálculo de vigas contínuas utilizando a análise elástica, ou seja, a redução da linha de fecho sobre os apoios já é verificado sem, com isso, utilizarmos da redução recomendada na NBr-6118.

A MNE também é facilitada, pois não há, como vimos, a necessidade de se conhecer os parâmetros elásticos (E - módulo de elasticidade; I - inércia; A - área), pois K=I (identidade).

Assim, com os resultados apresentados aqui, entre outros analisados nesta pesquisa, pode-se concluir que o critério da MNE pode ser utilizado na modelagem aporticada como alternativa à ALE. Porém, é importante ressaltar que, como todo critério plástica, a de MNE exige que o material seja dúctil o suficiente para a redistribuição de esforços até que atinja a ruptura localizada no processo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO SILVA, R. J. , **Modelo de Bielas e Tirantes Através de Modelagem aporticada.** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF, 133p, 1997

MELLO, E. L., **Some Applications of Generalized Inverse the ory to Strutural Problens,** Phd Thesis, Imperial College, London, 105p, 1980.

OLIVEIRA, L. D., **Projeto de estruturas de Concreto Armado Pelo Modelo Biela-Tirante Via Mínima Norma Euclidiana,** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF, 108p, 1995.

PAULA, V. F. , **Otimização e Segurança de Estruturas Metálicas Submetidas a Carregamentos Estáticos,** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF, 31 - 38, 1995.

BESSA, M. A. S. , **Análise Experimental de Vigas Paredes.** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF, 122p, 1994.